DOCUMENT RESUME

ED 064 987 FL 003 289

AUTHOR Parot, Jean Jacques
TITLE Actualizacion Matematica, AM-1 (Modernizing Mathematics, AM-1).
INSTITUTION Ministerio de Educacion Nacional, Bogota (Colombia). Instituto Colombiano de Pedagogia.
REPORT NO ICOLPE-1-IE-1-1-71
PUB DATE 71
NOTE 40p.

EDRS PRICE MF-$0.65 HC-$3.29
DESCRIPTORS Abstract Reasoning; *Cognitive Processes; *Early Childhood Education; Educational Games; Elementary Education; *Elementary School Mathematics; Instructional Materials; International Education; *Learning Activities; Logic; Mathematics Curriculum; Preschool Children; Spanish; *Teaching Methods
IDENTIFIERS *Colombia

ABSTRACT

This document, based on mathematical research conducted by the Instituto Colombiano de Pedagogia, is the first in a series of scheduled publications designed to report recent findings to teachers and to offer new methodological guidelines in teaching math. This document suggests elementary-level learning activities for helping the students develop thinking processes and powers of generalization and abstraction through the observation of concrete objects. The materials used initially are sets of "logic blocks" of various sizes, colors, shapes, and weights. The learning activities seek to develop a sense of logic and spatial organization. The document is not intended as a textbook but rather as a report to bring elementary school mathematics teachers up to date on current ideas. (VM)

icolpe

INSTITUTO COLOMBIANO DE PEDAGOGIA

1

Ministerio de Educación Nacional
Universidad Pedagógica Nacional

DOCUMENTO ICOLPE
I/IE I/I-71
CIRCULACION GENERAL

ACTUALIZACION

icolpe INSTITUTO COLOMBIANO DE PEDAGOGIA

DOCUMENTO ICOLPE
I/IE I/I-71
CIRCULACION GENERAL

ACTUALIZACION MATEMATICA

AM-1

BOGOTA, D.E. COLOMBIA

ACTUALIZACION MATEMATICA

La División de Investigaciones Didácticas del Instituto Colombiano de Pedagogía -ICOLPE- está desarrollando una serie de investigaciones sobre matemática, que pretende llevar los conocimientos más recientes de este campo a los profesores y alumnos del país.

El propósito central de la presente publicación es la de lograr la divulgación de los trabajos hasta ahora realizados por el Instituto, dentro de un plan de renovación matemática.

Las investigaciones están orientadas ante todo a ofrecer nuevas pautas metodológicas en la enseñanza matemática, con una concepción diferente en relación con la metodología tradicional.

Esta nueva orientación pretende enseñar a pensar antes que a calcular, llevar a generalizar y abstraer mediante la observación de objetos concretos. Se desarrollan el sentido lógico y la organización espacial hasta llegar a procesos mentales cada vez más complejos.

La presente es la primera de una serie de publicaciones que el ICOLPE tiene programada en el área de la matemática. Esta publicación, hemos pretendido dirigirla a los maestros para su información y en ningún caso puede considerársele como un texto para los alumnos de las escuelas primarias; en otras palabras, se pretende actualizar a los profesores que enseñan matemáticas a nivel elemental.

La División de Capacitación del Magisterio -DICMA- colabora estrechamente con ICOLPE en la publicación y divulgación de esta serie, así como también en la programación de cursos de actualización para el magisterio, que permita llevar estos nuevos conocimientos a cada maestro.

LOS BLOQUES LOGICOS Y LOS ARBOLES

A. Presentación del material.

Consideremos el conjunto de los bloques lógicos que inventó Z. P. DIENES.

Este conjunto cuenta con 48 bloques que se diferencian por:

El tamaño (grande, pequeño)

El color (amarillo, rojo, azul)

La forma (rectángulo, triángulo, disco, cuadrado)

El espesor (grueso, delgado)

B. Formas posibles de conocer este material.

El aprendizaje del material, se puede iniciar desde el Kinder.

1o.- Dejando que los niños jueguen con él, haciendo casas o lo que les parezca conveniente.

2o.- Luego, se puede orientarlos para que hagan clasificaciones por: color, tamaño, forma, espesor; de tal manera que se encuentren con la idea de clases de equivalencia.

Si el niño clasifica el material por colores, encuentra tres montones de bloques: un montón azul, un montón rojo y un montón amarillo; podemos observar que en cada montón dos bloques cualesquiera tienen el mismo color. Además un bloque no puede pertenecer a dos montones distintos, puesto que si es azul no puede ser ni rojo, ni amarillo.

En primero elemental se pueden presentar los bloques de una manera que guste a los niños, aprovechando la necesidad que tienen ellos de moverse. En el patio se dibuja primero una carretera que se bifurca en otras dos, en un cruce que llamamos el cruce tamaño, como sigue:

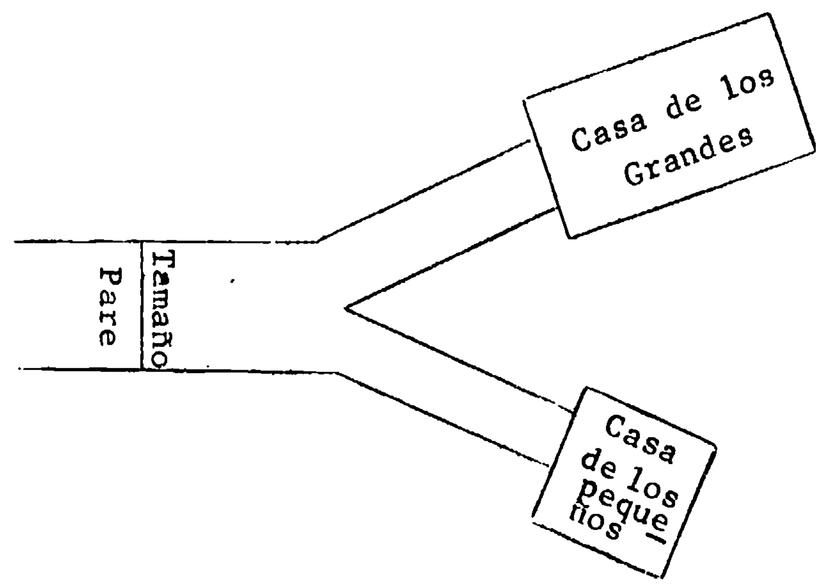


Figura 1

Al entrar en la carretera principal que muestra la Figura 1, cada alumno coge un bloque y se acerca al cruce que le presenta dos vías. Para considerar de qué cruce se trata mira cuáles son las vías posibles y escoge la que debe seguir, según el bloque que tenga: es decir, que si tiene uno grande, debe seguir el camino de los grandes y si tiene uno pequeño debe seguir el camino de los pequeños.

Al final del camino, encuentra una casa en la cual deja su bloque. Esta acción debe repetirse hasta lograr que ningún alumno se equivoque. Se puede aprovechar esta situación para decir: en una casa se encuentra el subconjunto de los bloques grandes y en la otra el subconjunto de los bloques pequeños.

Después se pueden comparar esos dos subconjuntos así: el maestro coge un bloque grande que puede ser el "triángulo azul grueso" y lo coloca sobre el bloque pequeño que es el "triángulo azul grueso". Luego puede tomar de los bloques grandes el "disco rojo delgado" que coloca sobre el bloque pequeño "disco rojo delgado"; y así sucesivamente con otros bloques, pidiendo a los niños que repitan el proceso. De esa manera se establece una correspondencia uno a uno (o biyección) entre el conjunto de los grandes y el conjunto de los pequeños.

Como existe una biyección entre los dos conjuntos no es necesario contar los elementos para concluír que tienen el mismo número de elementos, pues la biyección permite comparar el número de elementos de los dos conjuntos sin necesidad de saber contar.

Al devolver los bloques a sus casas correspondientes, es decir, los grandes a la casa de los grandes y los pequeños a la casa de los pequeños, nos formulamos las siguientes preguntas: Existe un bloque que pertenezca a la vez a las dos casas? Es evidente, esto no es posible porque no hay un bloque grande y pequeño a la vez. Qué podemos decir de los elementos encontrados en una misma casa? Se puede contestar que tienen el mismo tamaño. Así se vuelve a poner en evidencia la idea de relación de equivalencia con las clases correspondientes. La relación está en tener el mismo tamaño y las clases que corresponden a esa relación son los dos subconjuntos (subconjunto de los grandes y subconjunto de los pequeños).

Se puede llegar a considerar que el conjunto inicial es la unión de los dos subconjuntos que se encuentran en las casas.

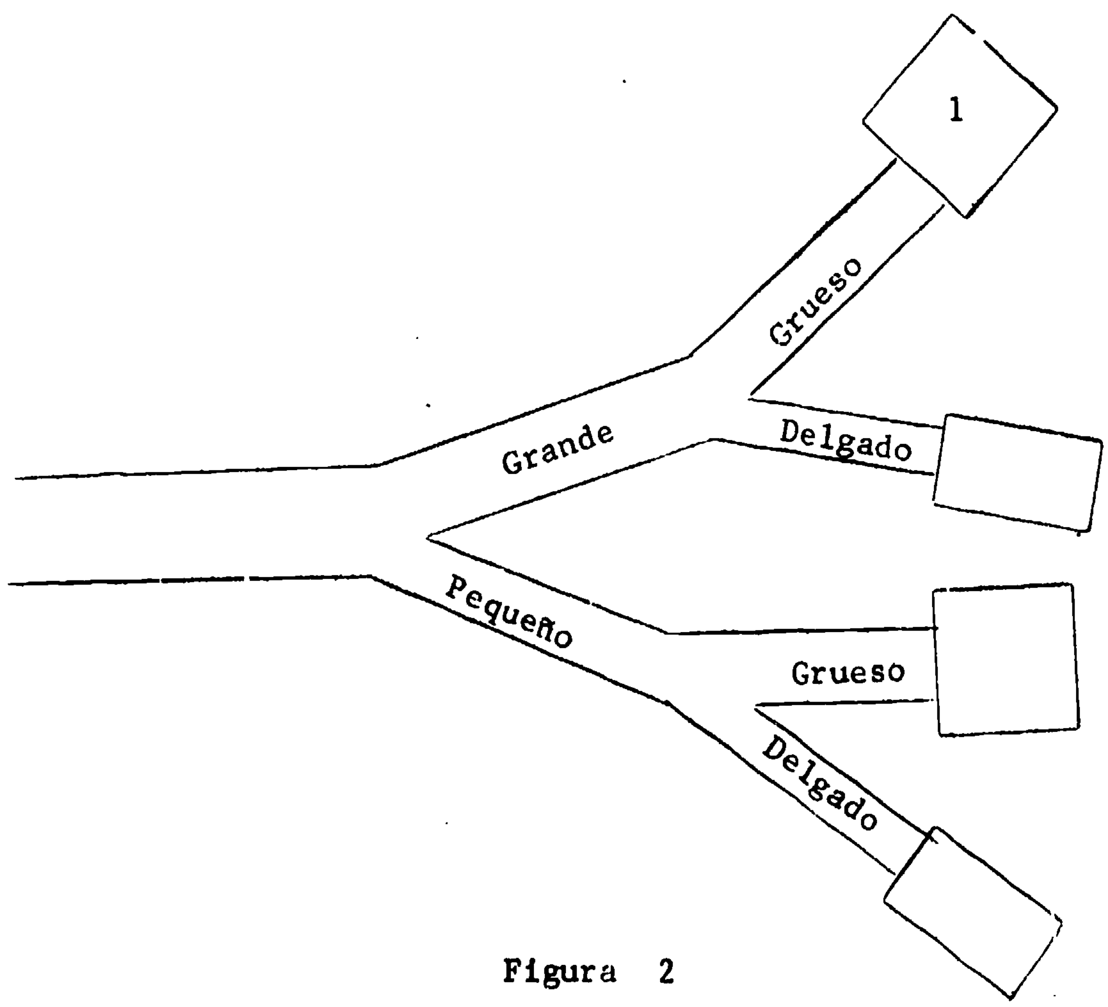


Figura 2

Luego puede considerarse en cada vía como lo muestra la Figura 2 el cruce espesor con los mismos problemas que para el cruce tamaño.

A medida que se avanza los cruces en cada vía se irán multipli cando y la situación se va haciendo cada vez más compleja. Se pueden comparar las dos gráficas siguientes:

SITUACION A

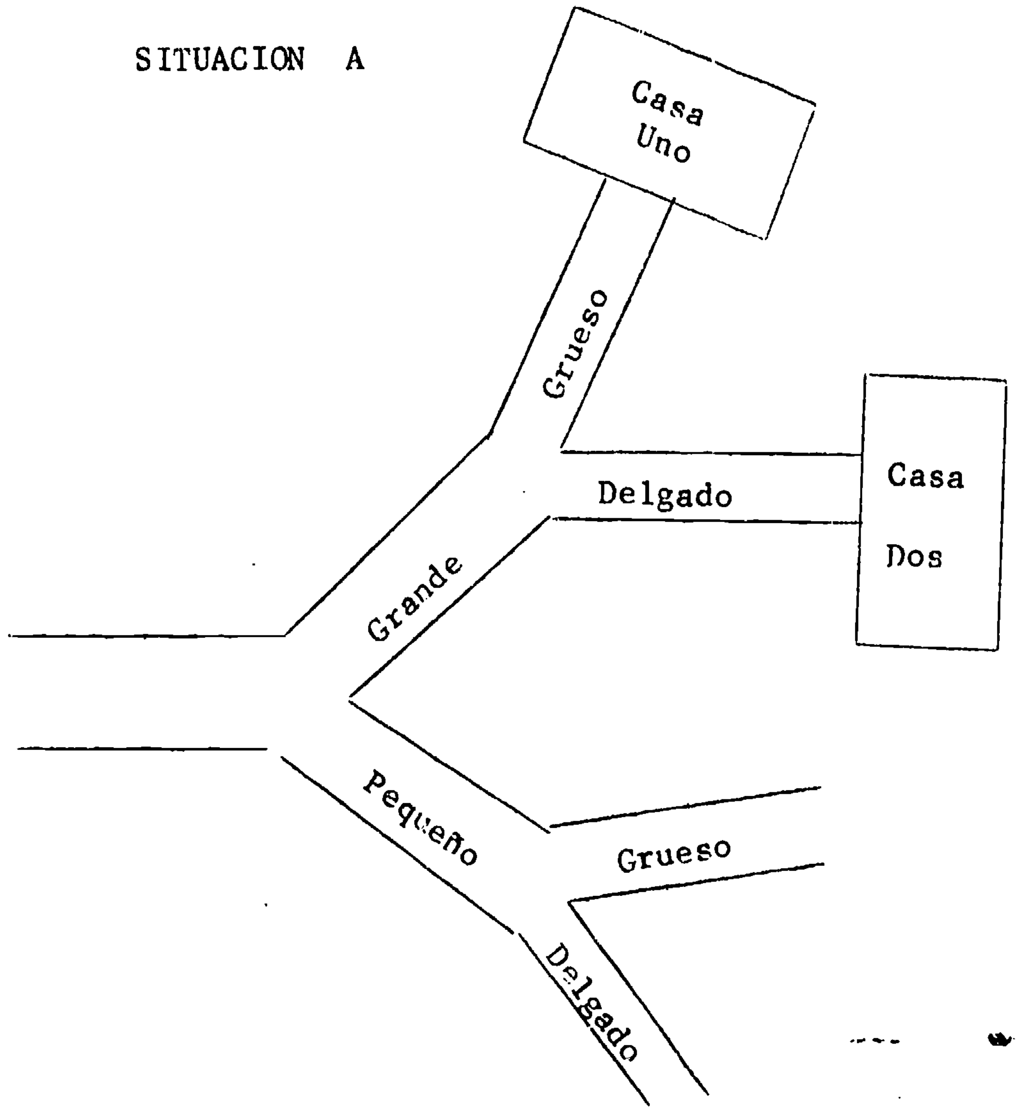


Figura 3

SITUACION B

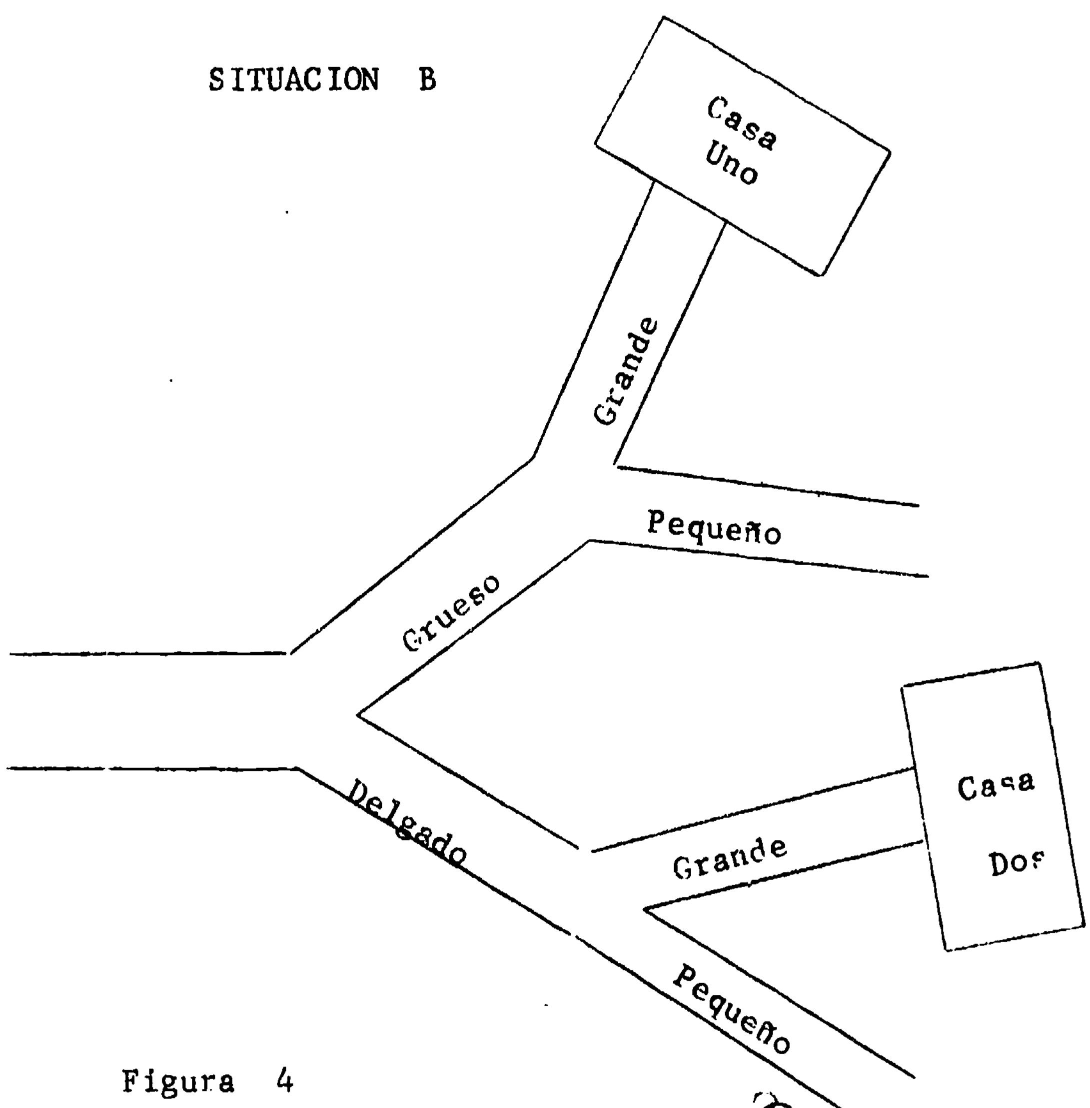


Figura 4

Observe que en los dos casos intervienen los mismos cruces pero en orden diferente.

Se encuentran o no los mismos subconjuntos en las dos situaciones? Para contestar es necesario dejar en cada casa los bloques de tal manera que el niño pueda comparar.

NOTA: De manera estricta, si hemos utilizado dos conjuntos de "bloques lógicos", no podemos decir que en las casas tenemos el mismo conjunto, si fuera el mismo, no podría estar a la vez en dos sitios distintos, pues un conjunto no puede ser igual sino a sí mismo. Pero si utilizamos la misma caja de bloques, y anotamos en una lista los elementos encontrados en la casa uno de la situación A, nos daremos cuenta que son los mismos que van a llegar a la casa uno de la situación B y entonces podemos decir que es el mismo conjunto que llega a las casas 1, igual conclusión tenemos para las casas 2.

Los alumnos se reparten en grupos de cuatro. Cada grupo hará sus carreteras con cruces tamaño y cruces espesor, es decir todos tienen el mismo esquema (que llamaremos árbol):

Figura 5 (página siguiente)

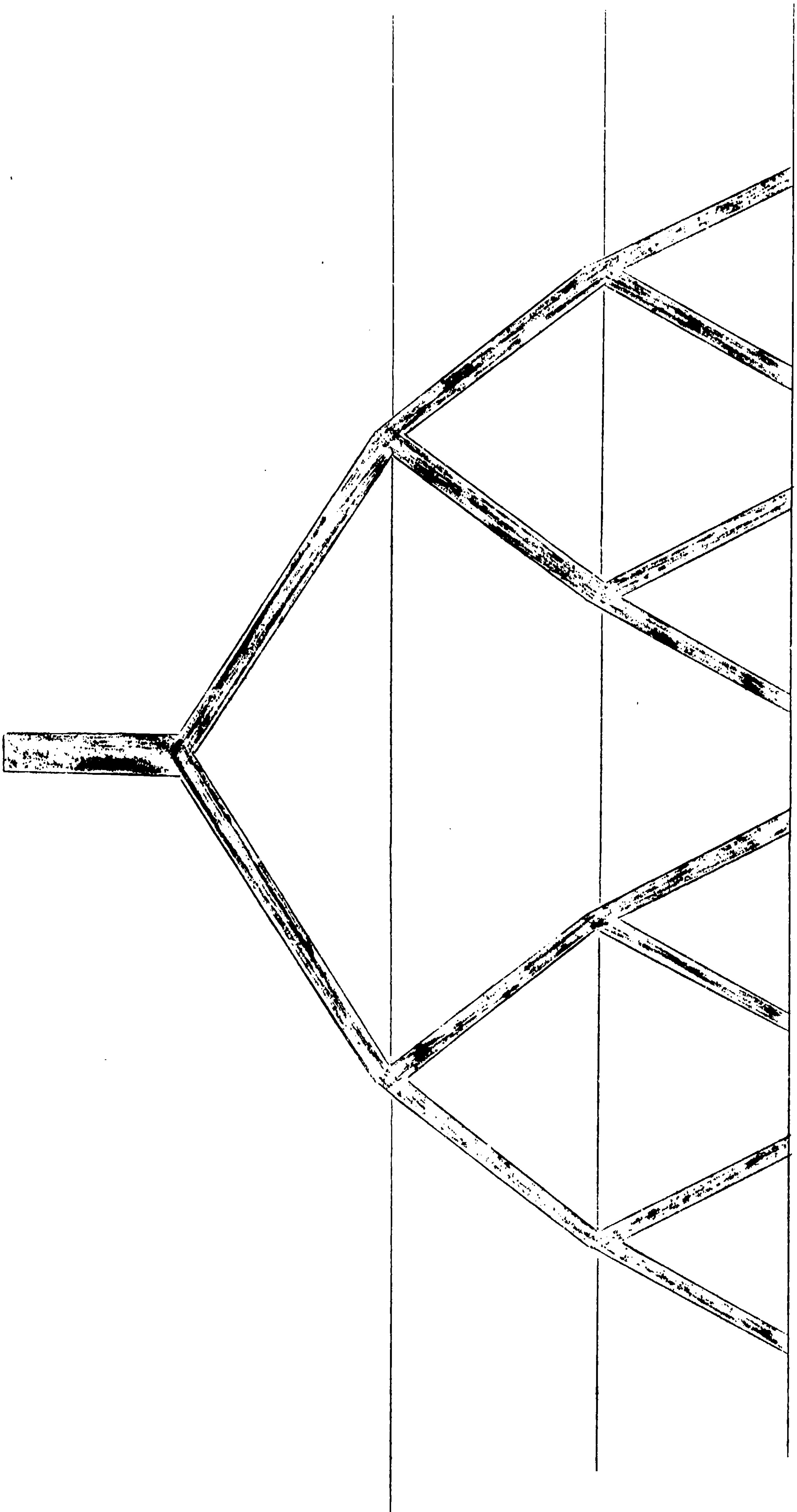


Figura 5

Los niños pueden escoger los nombres de los cruces. Probablemente se encontrará entre todos los esquemas, el siguiente:

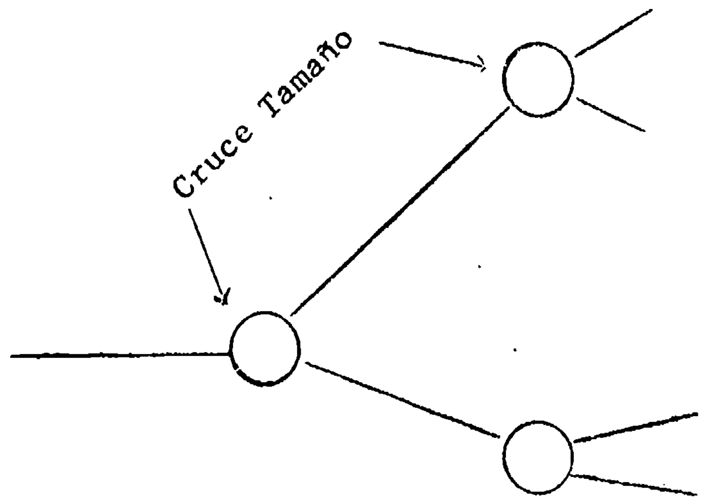


Figura 6

Si no se encuentra, el maestro deberá hacerlo para que se considere esta situación. Como siempre, todos los bloques entrarán por la vía principal para ir a la casa que les corresponda. Sorpresa! en una casa no hay bloques! Conclusión: hay un camino que no sirve! Por qué? (el maestro no debe en ningún caso dar la conclusión). Son los niños quienes deben llegar a concluír que eso ocurre cada vez que se siguen dos cruces de la misma naturaleza. Como no nos interesan los caminos inservibles, se evitará poner dos cruces de la misma naturaleza seguidos.

Establecida esta regla, cada grupo vuelve a considerar el circuito hecho para ver si está de acuerdo con ella. Cada grupo de alumnos dispone de un conjunto de bloques lógicos que reparte en las casas -

que se encuentran al final de cada camino. Después de la repartición se borran los nombres de los caminos y de los cruces. Otro grupo buscará cuáles son esos nombres, considerando únicamente los subconjuntos que se encuentran en las casas .

Luego pueden intervenir el cruce forma y el cruce color e idear todas las series posibles con los cuatro tipos de cruces conocidos. Regla: En una serie no se debe utilizar más que un cruce de cada tipo. También se anota que en las casas encontradas después del cruce N + 1 hay menos elementos que en la casa situada después del cruce N. Es decir que entre más se sube al árbol, menos elementos se encuentran en las casas. (En un curso ulterior se podrá precisar que el número de los elementos de una casa es un múltiplo del otro).

Finalmente se llega al árbol completo, en el cual cada serie de cruces contiene cuatro elementos distintos, que son: cruce forma, cruce color, cruce espesor y cruce tamaño.

En el árbol siguiente, en cualquier ruta tendremos la serie con los mismos elementos y en el mismo orden. En otras palabras tenemos la misma serie.

Figura 7 (página siguiente)

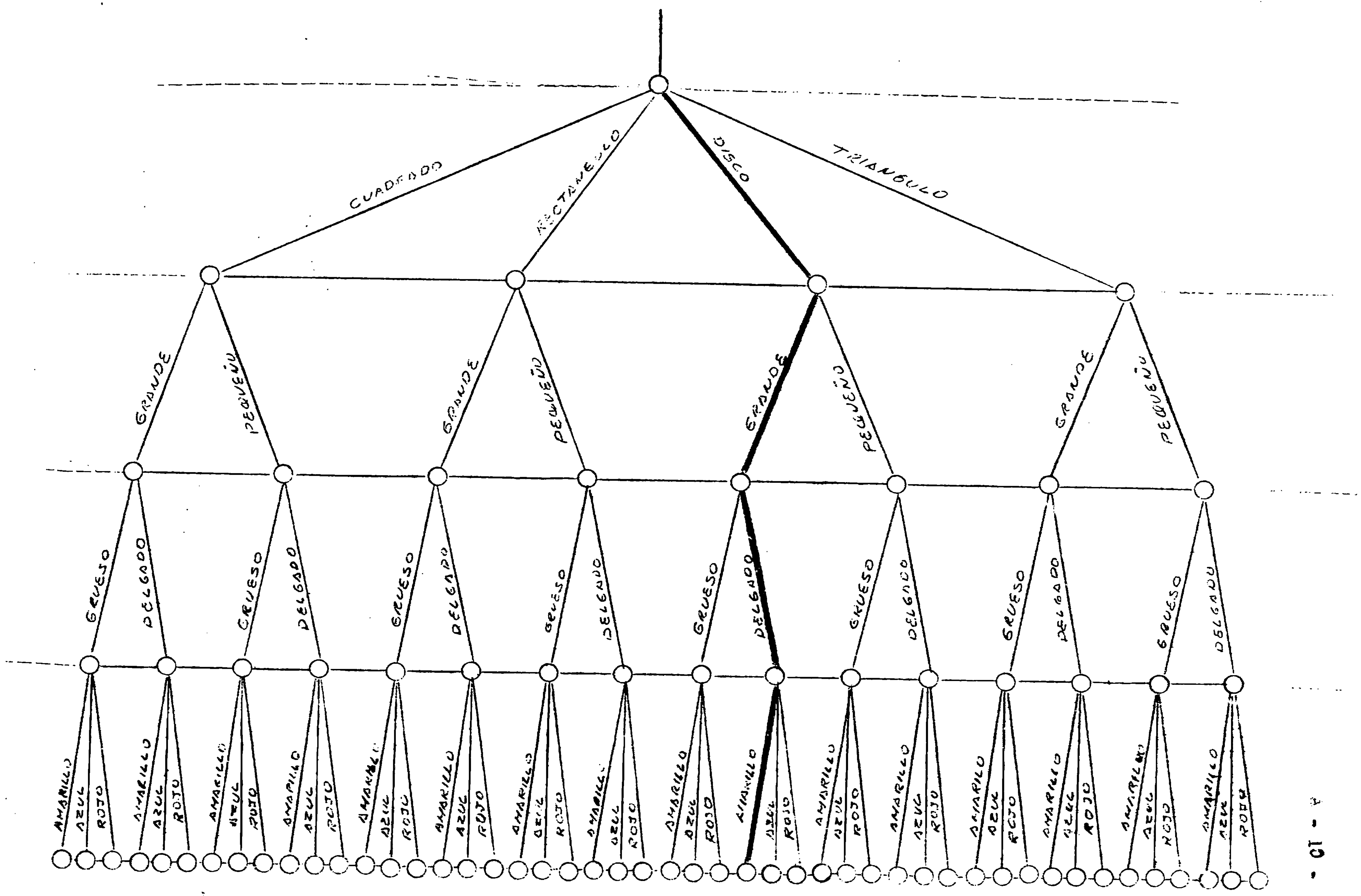

CUADRADO
RECTANGULO
DISCO
TRIANGULO
GRANDE
PEQUEÑO
GRUESO
DELGADO
AMARILLO
AZUL
ROJO

Figura 7

La manera más sencilla de obtener un árbol completo (más no la única) es considerar seri s de este cipo, pero es posible obtener - árboles sin que el orden de los cruces en la serie sea el mismo.

En cada casa que se encuentra al final de cada rama de nuestro árbol no hay más que un elemento.

Ejemplo: En la figura 7 se señala un camino entre 48 posibles, y solamente el bloque: disco- grande delgado-amarillo, puede llegar al final.

Se pide a cada alumno que haga su árbol de los bloques lógicos teniendo en cuenta que los cruces se hagan en el mismo orden. Serán todos los árboles distintos? Esta es una pregunta para el maestro, o tal vez, para un alumno de 5o. elemental.

Trataremos de resolverla haciendo un árbol. Si hemos establecido que siempre, en un árbol de los bloques lógicos, se debe seguir la misma serie, el problema entonces estará en encontrar el número de - series posibles con cuatro elementos distintos. A - B - C - D.

Para el primer elemento tenemos 4 posibilidades:

Figura 8 (página siguiente)

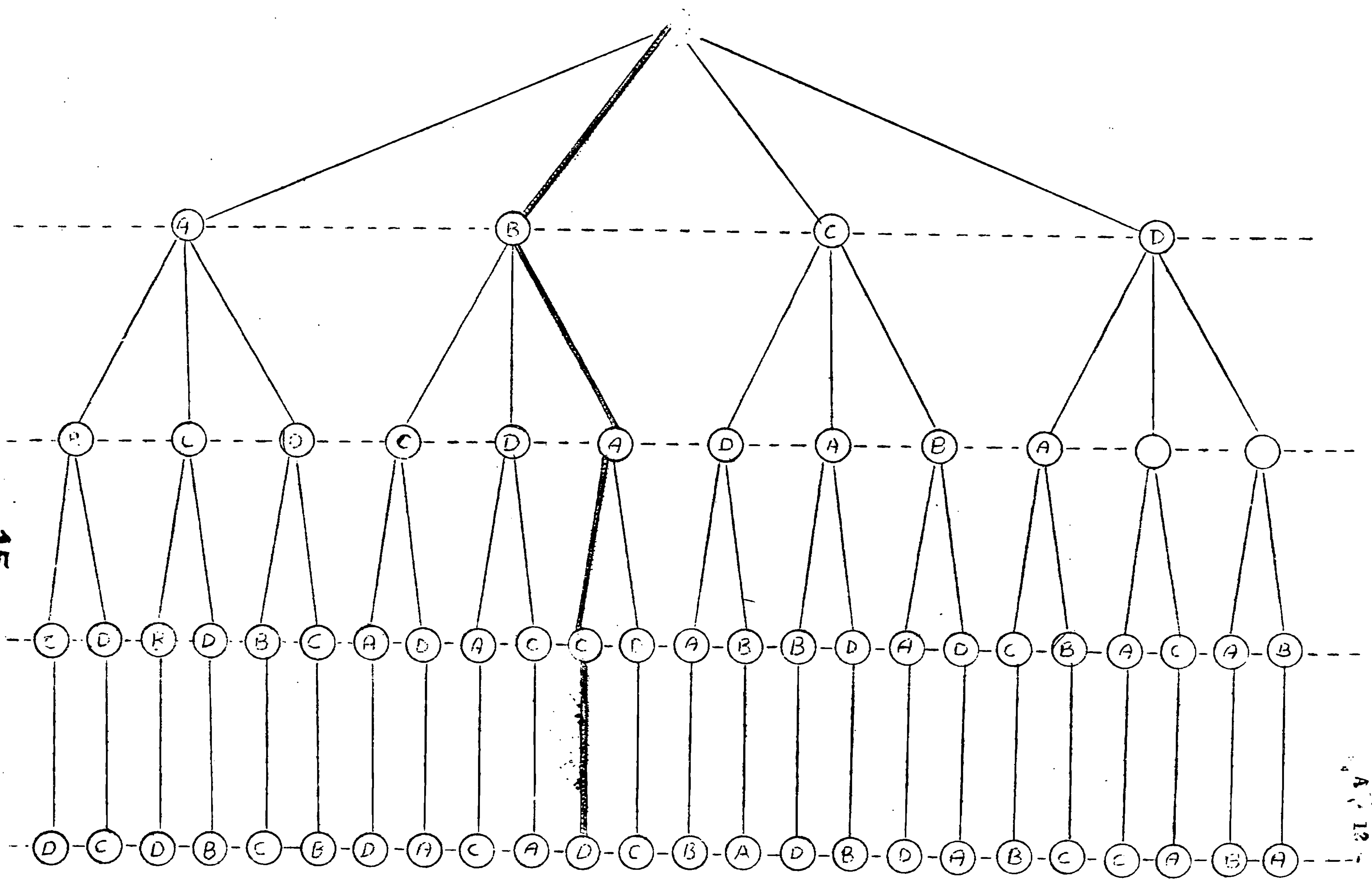


Figura 6

Para el primer elemento tenemos 4 posibilidades A - B - C - D. Al seleccionarse B, tal como podremos observar en la gráfica, quedan tres posibilidades para el segundo elemento (C) (D) (A) de las cuales se escogió (A). Como ya se han escogido los elementos (B) y (A) sólo resta escoger entre C y D como tercer elemento; en la gráfica se tomó (C) de tal manera que el cuarto elemento no pue de ser otro distante a (D).

Finalmente tendremos, en la gráfica, la serie (B) (A) (C) (D). Obsérvese que el número de series distintas es 4 X 3 X 2 X 1 = 24

C. Hacia qué nos conduce esto?

Sabemos el papel cada vez más grande, que desempeñan las probabilidades, la estadística y, desde luego, el análisis combinatorio. Como lo hemos visto, la noción de árbol facilita mucho los problemas de análisis combinatorio. Estudiemos otro ejemplo: En un restauran te cada cliente que entre a tomar el almuerzo debe comprar:

1o) una sopa.

- cuchuco (que representaremos por A1)
- un sancocho (que representaremos por A2)

2o) un plato principal:

- pollo (que representaremos por B1)
- cerdo (que representaremos por B2)
- carne asada (que representaremos por B3)

3o) un postre:

- Kumis (que representaremos por C1)
- Frutas (que representaremos por C2)
- Bizcocho (que representaremos por C3)
- Helado (que representaremos por C4)

4o) Una bebida:

- agua mineral (que representaremos por D1)
- cerveza (que representaremos por D2)

Cuántos tipos de almuerzo completo tiene disponibles el cliente? Hagamos un árbol y veamos los caminos posibles.

Figura 9 (página siguiente)

El camino que aparece en la Figura 9 corresponde al almuerzo formado por un plato de sancocho, carne de cerdo, una fruta y finalmente una cerveza.

Hay 2 x 3 x 4 x 2 = 48 tipos de almuerzo posibles.

Pero cuál es la razón para que el número de almuerzos posibles sea igual al número de bloques del conjunto de DIENES?

La respuesta es obvia: Para un almuerzo hay dos posibilidades de "sopa", de la misma manera que para un bloque hay dos posibilidades

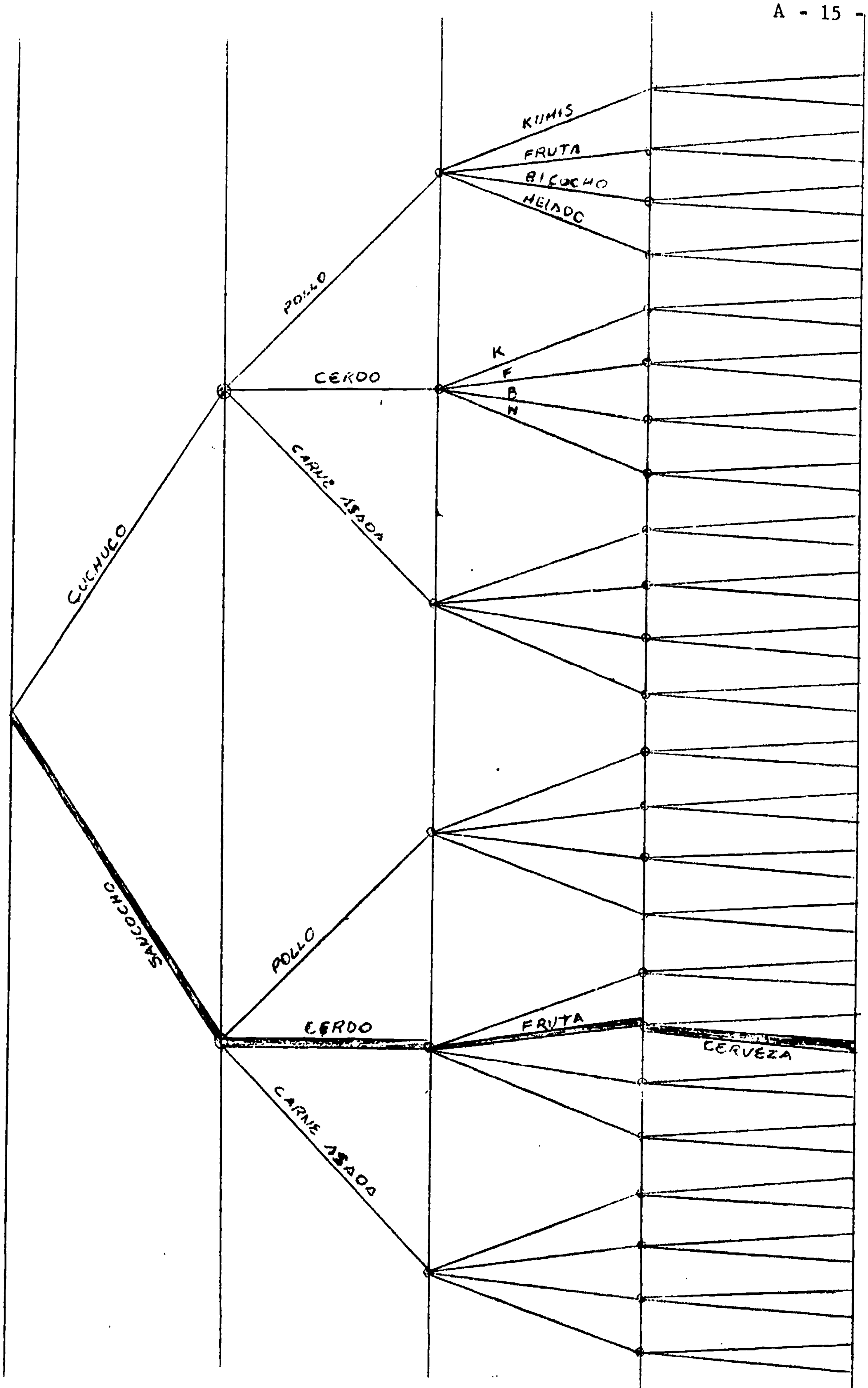

CUCHUCO
SANCOCHO
POLLO
CERDO
CARNE ASADA
KUMIS
FRUTA
K
F
B
H
POLLO
CERDO
CARNE ASADA
FRUTA
CERVEZA

Figura 9

de tamaño entonces la sopa en el almuerzo desempeña el papel del tamaño en los bloques y así podemos establecer este diccionario:

Bloques lógicos	almuerzos
Tamaño	sopa
Color	plato principal
Forma	postre
Espesor	bebida

Y aún complementarlo por ejemplo así:

Grande	cuchuco
Pequeño	sancocho
Azul	pollo
Amarillo	cerdo
Rojo	carne asada
Cuadrado	kumis
Triángulo	fruta
Disco	bizcocho
Rectángulo	helado
Grueso	agua mineral
Delgado	cerveza

Desde luego, es claro que:

Al Almuerzo		El Bloque
Cuchuco Pollo Kumis Cerveza	corresponde	grande azul cuadrado delgado

De la misma manera:

Al Almuerzo		El Bloque
Sancocho Carne asada Bizcocho Agua Mineral	corresponde	

Y:

Al Almuerzo		El Bloque
	corresponde	Pequeño Amarillo Disco Grueso

Nos damos cuenta que a un almuerzo no sorresponde sino un bloque y a un bloque no corresponde sino un almuerzo.

Decimos que esa correspondencia es una biyección, entre el conjun to de los almuerzos y el conjunto de los bloques.

Desde luego, para el matemático es igual hablar del conjunto de los bloques lógicos, o del conjunto de los almuerzos posibles: buscar los elementos comunes de dos almuerzos es el mismo problema que buscar las propiedades comunes de dos bloques.

Se puede luego hablar de números, según el nivel de preparación de los alumnos; si cada plato tiene su precio (lo pueden fijar los alumnos después de una encuesta), a cada bloque corresponde entonces un número. Cuáles son los precios de los almuerzos posibles? Cuál es el precio medio? Será esa correspondencia entre el conjunto de bloques y el conjunto de precios una biyección? Si cada bloque (o almuerzo) tiene un precio, es posible por ejemplo que 2 almuerzos cuesten $18; por tanto la correspondencia: almuerzo _____ precio, no sería una biyección y se podría averiguar que el número de bloques es distinto del número de precios.

Salgamos del restaurante y vayamos a pasear a otra región en la cual a los niños les gusta dibujar árboles cuyas ramas SE PARTEN SIEMPRE EN TRES: Veamos uno de esos árboles (acostado).

Figura 10 (página siguiente)

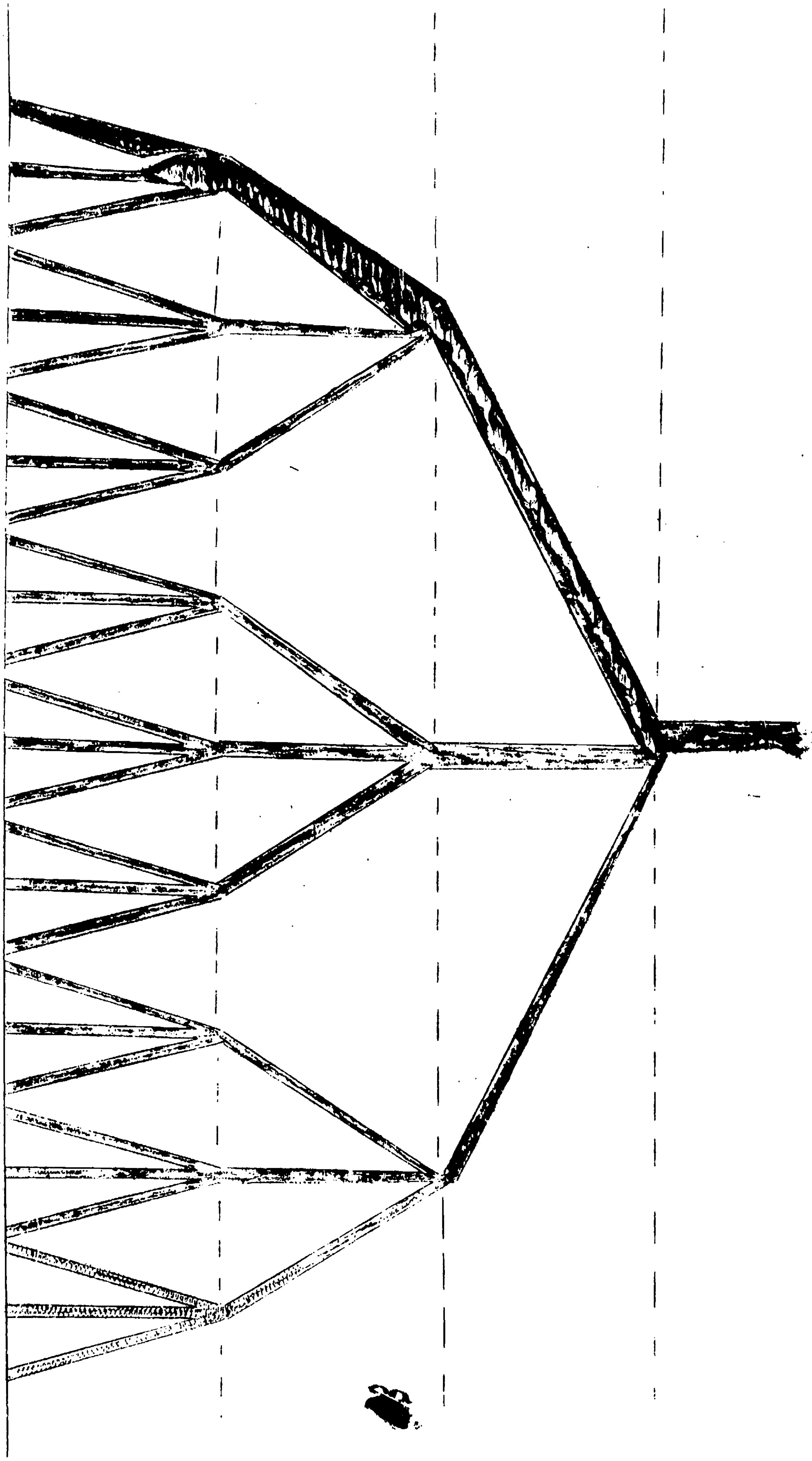


Figura 10

Representemos por 3^2 el número de caminos posibles que puede seguir un mono para subir al nivel dos; (2 es el número del nivel, 3 el número de partes en que se divide cada rama)

$3^2 = 9$ o sea $3 \times 3 = 9$

De la misma manera 3^3 es el número de caminos posibles que puede seguir un mono para subir al nivel 3.

$3^3 = 27$ entonces $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

Al generalizar la notación tenemos:

3^n será el número de caminos que permitan llegar al nivel n.

Por otra parte:

$3^1 = 3$ y $3^0 = 1$

2^3 es el número de caminos posibles para llegar al nivel 3, por tanto:

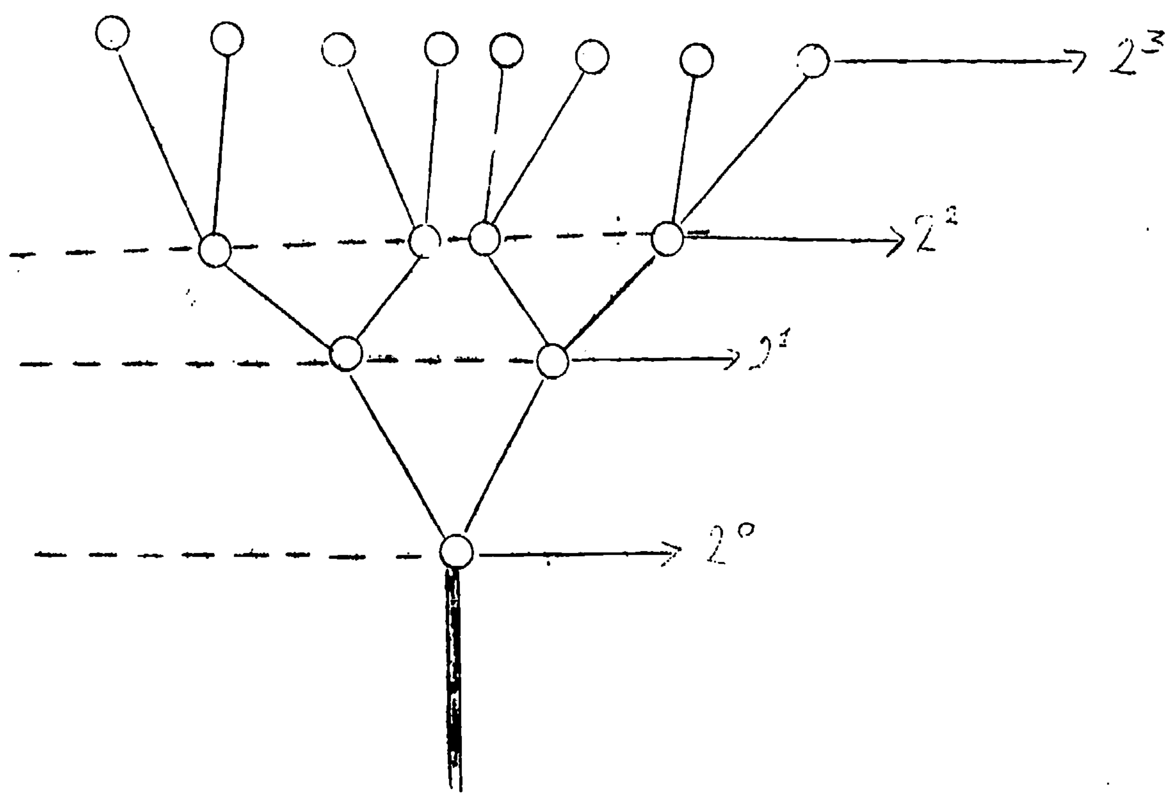


Figura 11

2^3 = --- $2^3 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{\text{3 factores}}$

2^2 = ---

2^n será el número de caminos que permita llegar al nivel n.

De manera general si consideramos a^n ,

<u>a</u> indica el tipo de árbol (es el número en que se parten las ramas) y

<u>n</u> corresponde al nivel.

NOCIONES DE BASE CONCERNIENTES A LOS CONJUNTOS

Supongamos que estamos en presencia de alumnos de lo. elemental.

Les vamos a presentar a la familia Ruiz

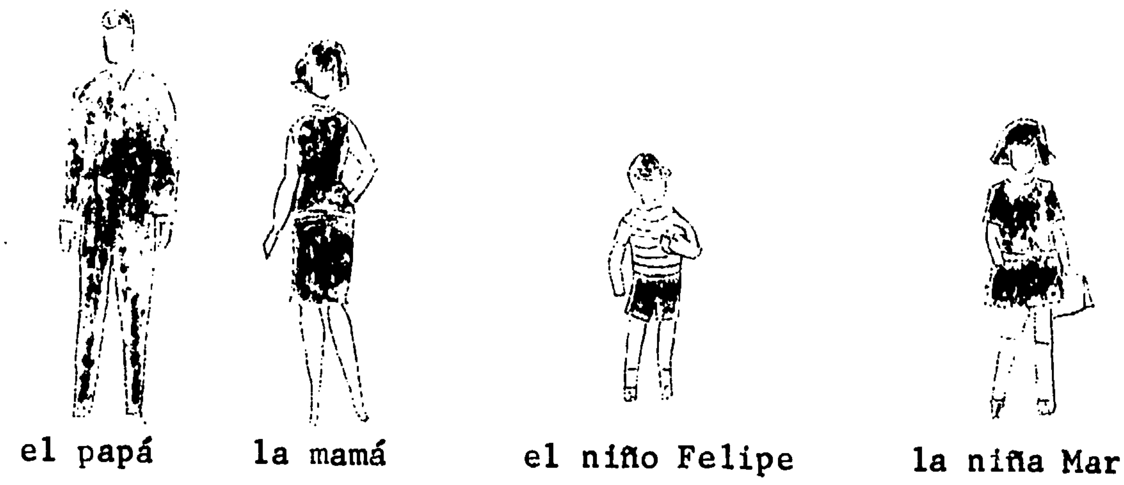


Figura 1

Ellos viven en un pueblo que se llama CHICATA.

En ese pueblo no hay otras personas que se llamen Ruiz. La gente de CHICATA no se interesa sino por la gente del mismo pueblo; por tanto el profesor de Matemáticas de CHICATA dice: para nosotros, el REFE - RENCIAL es el conjunto de las personas que viven en CHICATA. (Claro está que los niños probablemente no conocen todavía la palabra"referencial"). A alguien que le preguntaba sobre los Ruiz, el profesor le contestó: el conjunto de los Ruiz es un SUBCONJUNTO de nuestro referencial (es decir que cada persona o ELEMENTO de la familia Ruiz es un habitante de CHICATA). La familia Ruiz cuenta con 4 elementos.

Aquí está dibujada (sobre el plano de la ciudad) la casa de la familia Ruiz, figura 2.

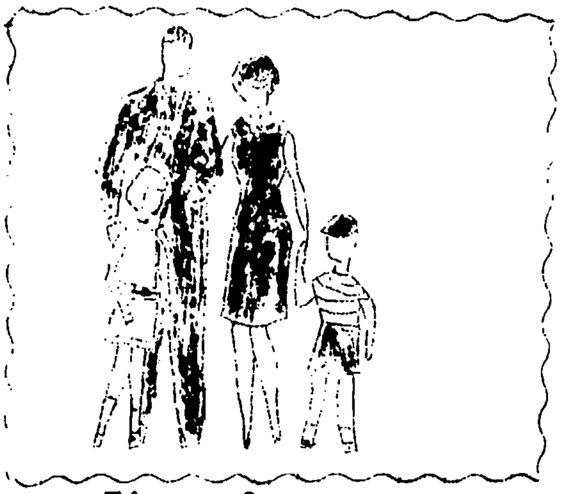


Figura 2

Podemos averiguar que en la casa de los Ruiz está el conjunto de los Ruiz.

NOTAMOS QUE:

1o.- Todas las personas que están en la casa pertenecen a la familia.

2o - Todas las personas que pertenecen a la familia están en la casa

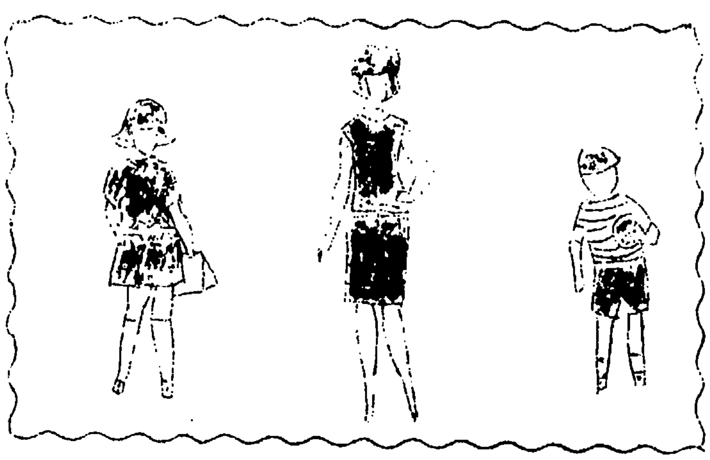


Figura 3

Ahora, el papá se fue a trabajar; en la casa quedan: la mamá, Felipe y Marta, figura 3. Ahora no podemos decir que en la casa está el conjunto de los Ruiz, pues existe un Ruiz que no está en la casa. Sin embargo podemos decir que en la casa encontramos UN conjunto de Ruiz. (No es conveniente hablar de UN conjunto de Ruiz en 1o. elemental; es suficiente que se capte bien la noción de EL conjunto de los Ruiz).

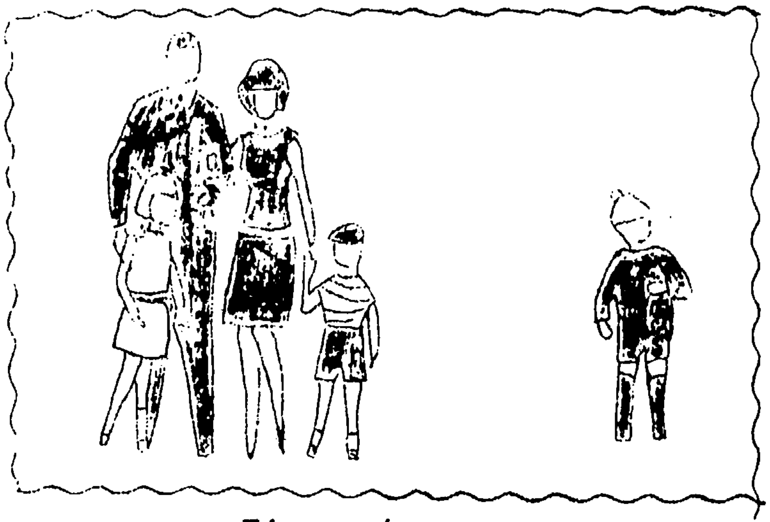


Figura 4

Pedro Alvarez, amigo de Felipe, vino a recogerle para ir a la escuela: el está en la casa de la familia Ruiz, ahora.

Entonces no podemos decir que en la casa de los Ruiz está el conjunto de los Ruiz, pues en dicha casa se encuentra Pedro que no pertenece al conjunto.

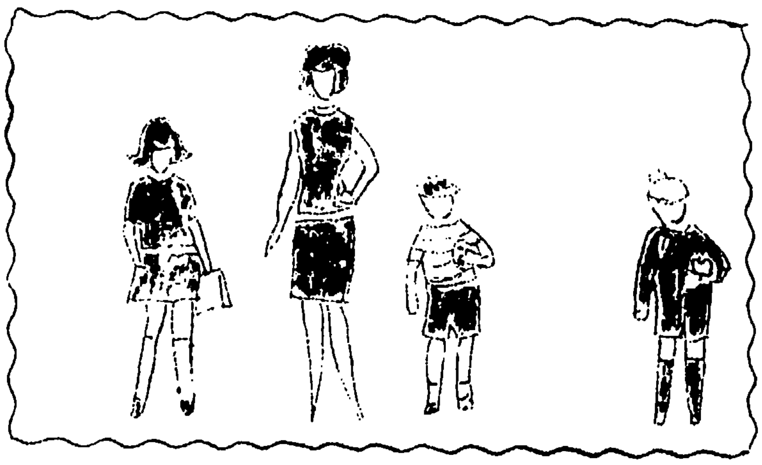


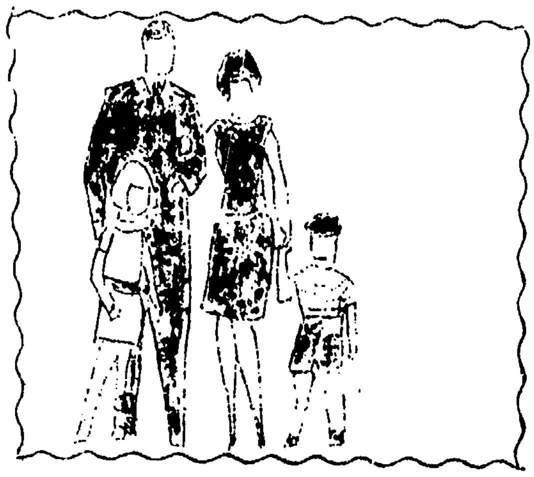
Figura 5

Cuando Pedro estaba en la casa, el señor Ruiz salió. Tampoco en éste caso podemos decir que en la casa está el conjunto de los Ruiz, por dos razones.

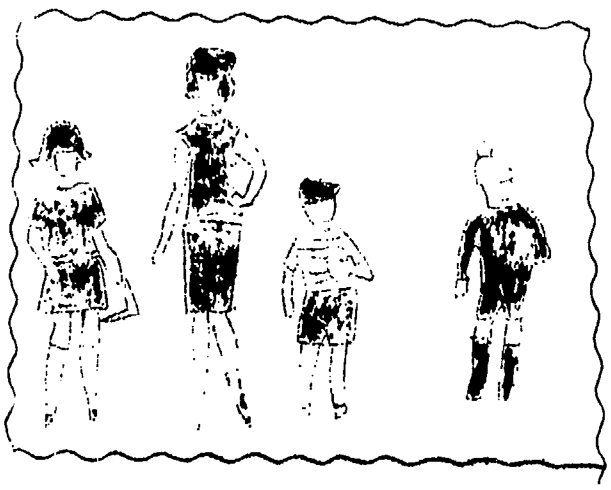
1o.- En la casa se encuentra una persona que no pertenece a la familia.

2o.- Existe una persona de la familia que no está en la casa.

Comparemos esa situación con la situación inicial en la cual el conjunto de los Ruiz estaba en la casa.



Situación Inicial



Situación actual

Figura 6

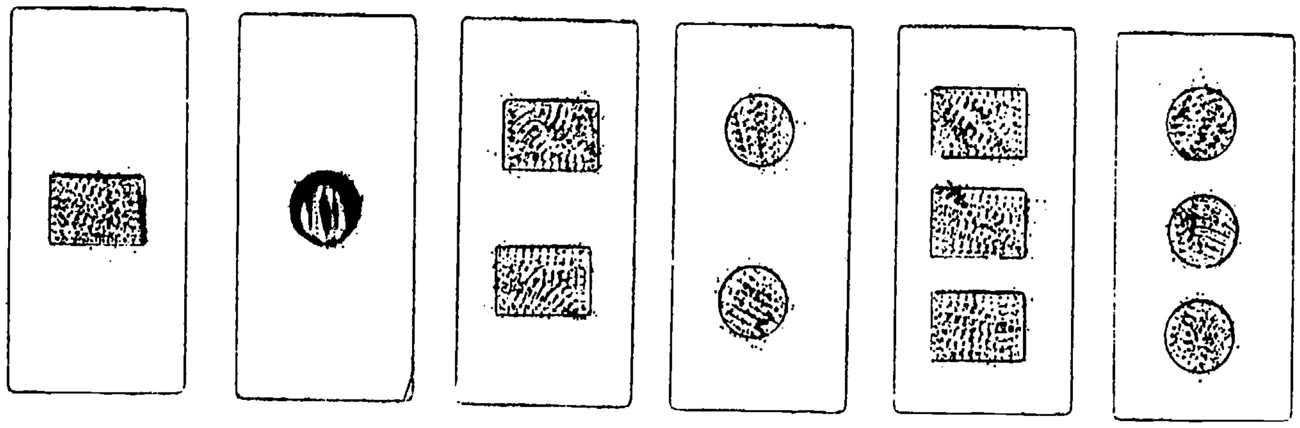
Podemos notar que los dos conjuntos son DISTINTOS pero tienen el MISMO NUMERO DE ELEMENTOS.

Es bueno estudiar cómo se pasó de la situación inicial a la actual y cómo se podría volver de la actual a la inicial.

En CHICATA existe también un hotel. Es día de mercado, el hotel está lleno de personas que vinieron de todas partes. Todos los que se alojan en el hotel tienen el mismo apellido? Podemos acaso decir que es el conjunto de los Ruiz o el de los Hernández? No, un hotel no es como en una casa cualquiera. Cómo podemos llamar entonces ese conjunto? Lo podemos llamar el conjunto de las personas alojadas en el hotel aquel día. (Se supone que en el hotel no hay sino los clientes).

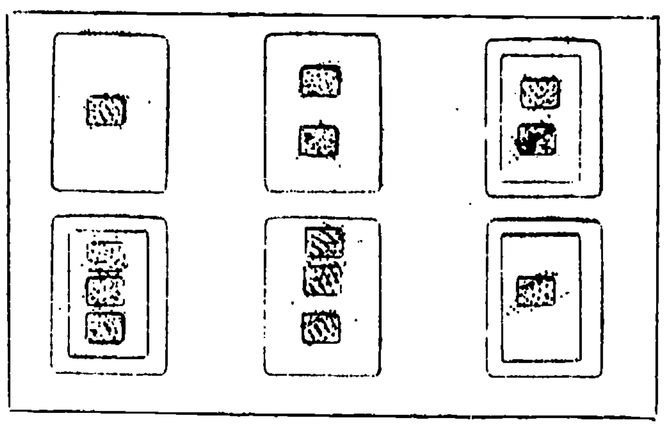
Otro día no había ningún cliente en el hotel, entonces el Profesor de Matemáticas de CHICATA dijo: es el CONJUNTO VACIO, pues él siempre usa esa palabra cuando habla de un conjunto que no tiene elementos. Por ejemplo dice: el conjunto de los abuelos menores de diez años es un conjunto vacío

Consideremos ahora un conjunto de naipes.



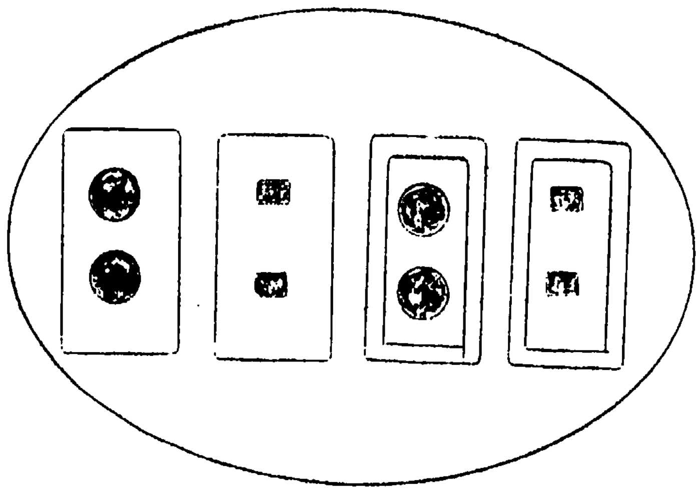
El mismo existe también en rojo (para representarlas usaremos un doble marco). Es decir nuestro referencial contiene doce elementos.

Analicemos la siguiente casa de naipes.



En esa casa se encuentra el conjunto de los rectángulos (para decir los naipes sobre los cuales están dibujados rectángulos) y en esta forma

Estamos en una situación parecida a la de la casa de la familia Ruiz con el conjunto de los Ruiz: si quitamos un naipe (o varios) no podemos decir que es EL conjunto de los rectángulos (pues no todos están en la casa) pero sí UN conjunto de rectángulos.



Consideremos otra casa; (figura 9) podemos decir que en esa casa se encuentra el conjunto de los naipes que tienen dos elementos.

Figura 9

Podemos averiguar que:

1o.- Cada naipe que está en la casa cumple con la propiedad "tener dos elementos".

2o.- Fuera de la casa ningún naipe cumple con esa propiedad.

Para resumir esto, podemos decir:

"Tener dos elementos" es una PROPIEDAD CARACTERISTICA de los elementos del conjunto. (Esta palabra se usa lo más tarde posible: es más conveniente no hablar sino de "la casa de los rectángulos" o el "conjunto de los rectángulos").

Dado un REFERENCIAL, se consideran sus elementos y se fijan las propiedades que se van a tener en cuenta. Se puede notar que a cada propiedad corresponde un subconjunto del referencial. Por ejemplo: con el último referencial considerado hemos visto que conjunto correspondía a la propiedad "rectángulo" y luego que conjunto correspondía a la propiedad "tener dos elementos".

De la misma manera se podrían buscar los subconjuntos que corresponden respectivamente a las propiedades "rojo","negro", "tener un elemento", "rojo o tener un elemento".

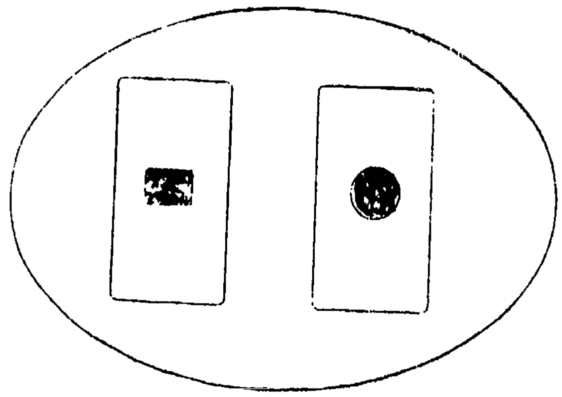
¿Ahora cuál sería el subconjunto que corresponde a la propiedad "rojo o negro"? ¿Cuáles naipes entran en la casa de los "rojo o negro"? Entran todos los rojos por una parte y todos los negros por otra parte, es decir que ningún naipe se queda por fuera o mejor dicho el subconjunto de los "rojo o negro" es el mismo referencial.

¿Ahora cuál sería el subconjunto que corresponde a la propiedad "disco y rectángulo"? Para entrar en esa casa un naipe debe cumplir con las dos condiciones siguientes: llevar discos y llevar rectángulos. Como ninguno cumple tales condiciones, en dicha casa no puede entrar ningún naipe. Es decir que el subconjunto que corresponde a la propiedad "disco y rectángulo" es el subconjunto vacío.

Ejercicio: Buscar propiedades que correspondan al conjunto referencial y otras que correspondan al conjunto vacío.

HEMOS VISTO QUE A CADA PROPIEDAD CORRESPONDE UN SUBCONJUNTO.

Consideremos el subconjunto: Figura 10



¿Existe una propiedad característica de los elementos de ese subconjunto? o ¿Será esta la casa de que?

Figura 10

Buscamos entonces las propiedades comunes. Tienen el mismo color negro. ¿Es la casa de los negros? No, pues hay unos pocos que están fuera. Como no tienen otra propiedad común (ni tampoco un apellido común) podemos considerar que esa casa es parecida al hotel de CHICATA: para saber de qué se compone ese conjunto hay que DAR LA LISTA DE SUS ELEMENOTS o DEFINIR EN EXTENSION EL CONJUNTO. (Pero esta expresión "definición en extensión" no se puede usar antes del bachillerato). Es obvio que no estamos en la misma situación que en el caso de la casa de los Ruiz: para pertenecer al conjunto de los Ruiz es necesario y suficiente tener el apellido Ruiz. Cuando se da la propiedad característica de los elementos del conjunto se dice que SE DEFINE EN COMPRENSION EL CONJUNTO. (La expresión "definición en comprensión" no se debe usar antes del bachillerato).

En resumen hay dos maneras de definir un conjunto:

Definición en extensión.

Definición en comprensión.

Pero lo importante es que el conjunto esté BIEN DEFINIDO.

Consideremos algunos casos en los cuales nos encontramos con conjuntos mal definidos:

- El conjunto de los niños.

No se sabe si se trata de los niños que están en un cierto salón o en todo el mundo.

¿Hasta qué edad se considera que uno es niño?

En conclusión: dado un cierto individuo, no se puede asegurar si pertenece o no al conjunto. Eso no debe ocurrir en Matemáticas, por tanto es necesario:

1o.- FIJAR BIEN EL REFERENCIAL.

2o.- REFERIRSE A UNA PROPIEDAD BIEN DEFINIDA.

Consideremos otro ejemplo: "el conjunto de los niños que se encuentran en ese momento en el salón y que tienen ojos azules".

Ya hemos evitado ciertos problemas: si consideramos un niño que no está en el salón, no pertenece a ese conjunto.

Si consideramos un niño que se encuentra en el salón y que tiene ojos muy negros, tampoco pertenece a ese conjunto. Pero si se pide que cada uno haga la lista de los elementos de ese conjunto es muy probable que no todas las listas sean iguales. Esto prueba que la noción de ojo azul es una NOCION SUBJETIVA.

Cuando se usa una noción subjetiva hay dudas en cuanto a la lista de los elementos del conjunto correspondiente y por eso

> 3o.- NO SE DEBEN UTILIZAR PROPIEDADES SUBJETIVAS para definir un conjunto.

Pero parece que en lo dicho anteriormente existe una contradicción: por una parte hemos considerado el conjunto de los naipes rojos, pero por otra parte hemos dicho que no se puede considerar el conjunto de los niños que tienen ojos azules.

La explicación es sencilla.

Es cierto, que al principio, la noción de color es subjetiva pero si no existen sino dos tonos distintos se puede decidir que a uno se le llama rojo y al otro negro de tal manera que todos se pongan de acuerdo en cuanto a lo significado por esas palabras, de tal manera que se elimine lo subjetivo en ellas, y se las pueda emplear para definir conjuntos. Ocurre lo mismo con muchos materiales: si hay discos de dos tamaños distintos podremos decir que hay uno grande y uno pequeño. Pero si a ese conjunto se añaden discos de una talla más pequeña tendremos que llamar mediano (por ejemplo) el que antes era el pequeño y llamaremos pequeño al nuevo disco. Lo importante es que TODOS ESTEN DE ACUERDO EN CUANTO A LO SIGNIFICADO POR LA PROPIEDAD CONSIDERADA, es decir que si se considera un objeto y una propiedad no hay ninguna duda posible:

- o el objeto tiene la propiedad
- o el objeto no tiene la propiedad.

Consideremos ahora un conjunto de carros. Mi carro pertenece a ese conjunto. ¿Puedo o no decir que el timón de mi carro pertenece al conjunto? ¿Es el timón un carro? La respuesta es no, y por tanto el timón no puede ser elemento del conjunto. Además, no se ha precisado si para pertenecer al conjunto, un carro debía llevar o no un timón, luego mi carro podría pertenecer al conjunto sin tener timón.

Conclusión: UNA PARTE DE UN ELEMENTO NO ES UN ELEMENTO.

Por ejemplo: si consideramos un conjunto de niños, el brazo de un niño no es elemento de ese conjunto.

Sin embargo, si se ha precisado lo contrario, puede ocurrir que una parte de un elemento sea también un elemento, por ejemplo si digo: consideramos el conjunto que tiene por elementos Carlos Ruiz como primer elemento y el brazo derecho de Carlos Ruiz como segundo; entonces ocurre que el brazo derecho de Carlos es una parte de él,que es también elemento del conjunto.

Veamos algunos símbolos que se utilizan después del 2o. grado de primaria.

El apellido de un conjunto es generalmente una mayúscula, por ejemplo N representa el conjunto de los números naturales 0, 1, 2, 3, ... etc., que se escribe: $N = \{0, 1, 2, 3, 4 \dots\}$, ponemos puntos suspensivos .... porque no se pueden escribir todos los números y porque no hay dudas en cuanto a los elementos que siguen.

Para escribir que 2 es un elemento de N podemos escribir $2 \in N$ es decir que el símbolo significa "es elemento de" o "pertenece a".

Consideremos ahora el conjunto N*: $N^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\dots\}$. Vemos aquí que 0 no es elemento de N, por lo cual escribimos $0 \notin N$

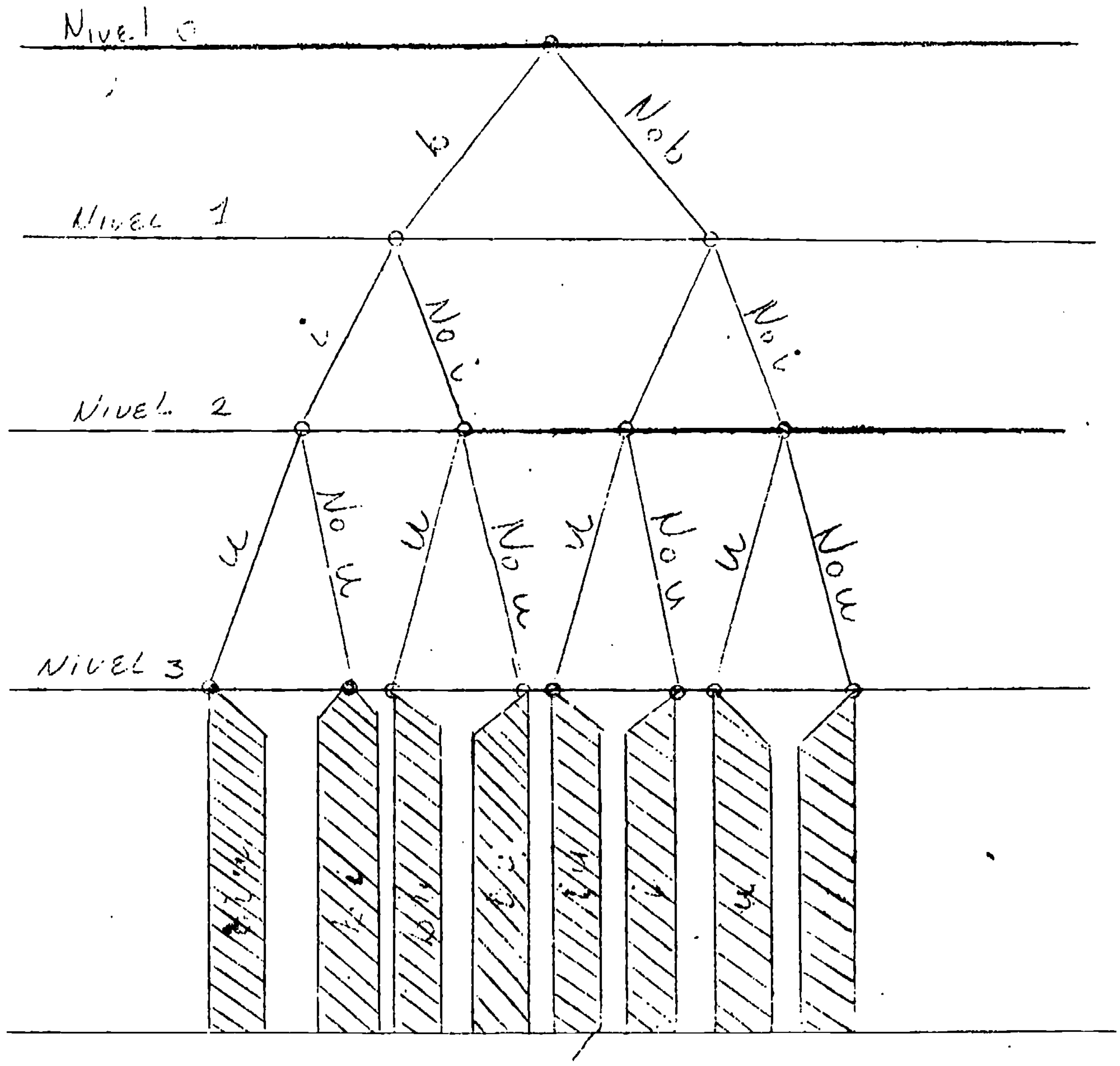
Podemos notar que todo elemento de N* es también elemento de N, es decir que N* es un subconjunto de N lo que podemos escribir $N^* \subset N$ es decir que el símbolo $\subset$ significa "es incluído en" o "es un subconjunto de".

<u>Problema:</u> Dado un conjunto de tres elementos, por ejemplo:

$$E = \{b, i, u\}$$

¿Cuántos subconjuntos de E es posible formar?

Se puede proceder de la siguiente manera: o se toma la b, o no se toma; después o se toma la i, o no se toma; al fin o se toma la u, o no se toma. Sería tal vez más fácil representarse eso haciendo un árbol:



Encontramos 8 subconjuntos posibles. ¿Por qué 8? De cada punto de cada nivel salen 2 "caminos" haciendo que el número de caminos posibles que tendría un mono para subir del nivel 0 al nivel 3 es 2 x 2 x 2 = 8 o de otra manera 2^3.

Además podemos notar que, entre esos subconjuntos figuran el conjunto vacío y el conjunto E.

Ejercicios :

Con otro ejemplo buscar el número de subconjuntos que se pueden obtener a partir de un conjunto de 4 elementos.

Llegar a la conclusión que si un conjunto E tiene n elementos, el conjunto que representaremos por P (E) de todos los subconjuntos de E tiene 2^n elementos.

Jean Jacques Parot

Experto del Gobierno Francés

ante el I.C.O.L.P.E.

Instituto Colombiano de Pedagogía