PROMOTING COVARIATIONAL REASONING WITH THE AID OF DIGITAL TECHNOLOGY

Helen Mariel Pérez Martínez
Cinvestav-IPN
helen.perez@cinvestav.mx

Carlos A. Cuevas-Vallejo
Cinvestav-IPN
ccuevas@cinvestav.mx

Erasmo Islas Ortiz
Cinvestav-IPN
erasmo.islas@cinvestav.mx

José Orozco-Santiago
Benemérita Universidad
Autónnoma de Puebla
jose.orozco@fcfm.buap.mx

In this paper, we present the development of an investigation on the promotion of covariational reasoning in high school students (14-15 years old) in Mexico. The study consists of designing and applying a sequence of didactic activities that simulate a real situation virtually. The activities are organized through a Hypothetical Learning Trajectory supported by digital technology and elements of Cuevas-Pluvinage didactics. The activities were evaluated according to the levels of covariation proposed by Carlson and colleagues, categorizing students' achievements and difficulties for each level of understanding. The results show that the activities favor students' progress by moving from the context situation to the different representations, establishing the relationship between the variables, and identifying their functional dependence.

Keywords: Secondary Education, Technology, Algebra, and algebraic thinking.

Introduction

Variational thinking has been interpreted as a way of modeling the covariation between quantities and magnitudes, according to Vasco (2003):

> a dynamic way of thinking, which attempts to mentally produce systems that relate their internal variables so that they covary like the patterns of covariation of quantities of the same or different magnitudes in the cut-out subprocesses of reality. (p. 6)

In various investigations (Carlson et al., 2002; García, 2016; Tompson & Carlson, 2017), it has been found that the concept of covariation between variables leads to the concept of function because the covariation relationship is often expressed as a functional relationship. Despite being present from elementary algebra to calculus, it is still a topic that is a source of difficulties for students. They fail to perceive and relate the patterns between the quantities involved in the different mathematical situations presented to them. There are even studies, such as that of Aldon and Panero (2020), that have reported cases where the interpretation of the mathematical situation proposed when analyzing the variables involved, students confuse a graph with the trajectory of a moving object, from which a lack of clarity in the meaning of the axes and the interpretation of the graphical representations is inferred.

Given this problem, some studies, such as Vasco (2006), recommend that the teaching of variation should occur in various contexts that represent real situational problems for the student, that are adapted to the proposed learning objectives, and that lead to the concept of function. However, these contexts must have specific characteristics that make it possible to achieve these objectives; as mentioned by Hitt (2021), the characteristics of the environment that can contribute to the development of conceptual understanding include the teachers' approaches, the types of tasks given to students, and the use of a variety of representations.

For his part, Avila (2018) warns of the importance of variational thinking for the concept of a real function since "there is a need to establish activities in the classroom, in which school alternatives that promote the recognition of variation in situations in which the concept of function is present are raised" (p. 198).

Our study approaches activities from a variational-covariational approach with digital technology support. In the NCTM standards (2000), technology enriches the range and quality of investigations since it allows viewing mathematical ideas from multiple perspectives. The feedback enhances student learning that technology provides, and it gives teachers options for adapting instruction to student's special needs.

Theoretical Framework

Variational thinking

Since Moore and Carlson (2012) report the importance of variational and covariational reasoning for students' ability to model dynamic situations, the position we adopt regarding variational thinking corresponds to that of Maury and colleagues (2012), which is complemented by that of Moore and Carlson, since they conceive this thinking as the ability to identify phenomena of variation and change, to interpret them, describe them, quantify them, model them, transform them and predict their consequences. Developing variational thinking allows students to naturally identify phenomena of variation and change and to be able to model and transform them, which will contribute to the development of mathematical thinking processes linked to algebra, functions, and calculus.

Considering that the study has as part of its learning trajectory to involve the analysis of the coordination and functional relationship between variables, we assume as one of its central axes *the covariate reasoning,* which is defined by Carlson et al. (2002) as “the cognitive activities involved in coordinating two varying quantities while attending to the ways in which they change in relation to each other” (p. 357).

The framework on covariation proposed by Carlson and colleagues consists of mental actions, which provides a taxonomy to classify and analyze the behaviors that students present when engaging in covariation activities. According to the authors, there are five levels of development; however, for this research and considering the academic level, the activities were designed according to the first three levels: Level 1 (N1) Coordination, Level 2 (N2) Direction, and Level 3 (N3) Quantitative Coordination; which are presented in terms of mental actions supported by images.

Cuevas and Pluvinage Didactics

The implementation of this didactic framework is considered since it establishes didactic engineering for the planning of a mathematics program at a post-elementary level; proposing didactic principles that guide the design of tasks; for example, starting the activities with a conceptually rich problem of interest to the student, where the student is the one who solves it, and once the problem is solved, his answer must be verified—allowing the student to be an agent of action and leading him gradually towards the mathematical concept (Cuevas & Pluvinage, 2003).

Objectives

This study's objective is to design a didactic sequence that promotes the understanding of the processes of variation-covariation as an antecedent for the concept of function in high school students (14-15 years old). Activities are proposed in digital didactic environments to achieve this, which address mental actions linked to recognizing variables and their relationships. These activities aim to identify what level of covariation students reach when interacting with mathematical models that allow them to interpret, predict, describe and explain situations of functions, both linear and nonlinear. In this way, we will be able to inquire about the difficulties faced by students, categorizing them and associating them to each level of covariation.

Research Question

What levels of covariational reasoning do students achieve when interacting with scenarios designed for linear and nonlinear function covariation situations?

Methodology

This study is developed using Design-Based Research (DBR) proposed by (Bakker, 2018), consisting of the phases of preparation and design, teaching experiment, and analysis of results. For the design of our sequence of activities, we used a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) (Simon 1995) and elements of Cuevas-Pluvinage didactics.

Phase 1: Preparation and design

The role of technology in this study is as a means of support for the simulation of our context of variation and covariation. The context used to carry out each activity consists of simulating the route of a cable car, where the student is asked to analyze the movement of the cabins in different sections of the way.

The objective of each activity is described below:

Activity #1. For this activity, mental action one (MA1) is taken into account, considering the coordination of the value of one variable with the changes in the other, i.e., in this case, it is considered whether the student goes through a process where they first try to identify the different magnitudes involved in the phenomenon: constants, parameters, and variables. Once they have identified which magnitudes vary and remain constant; students are expected to establish a functional relationship involving the magnitudes through different forms of representation (symbolic, tabular, and graphical) (see Figure 1a).

Activity #2 part 1. This activity takes into account mental action two (MA2), in which the coordination of the direction of change of one variable with the changes in the other variable is considered; that is, it is observed if it can identify the direction of change if it presents a growth or a decrease in the output value while considering the changes in the input value (see figure 1b).

Activity #2 part 2. In this activity, we consider the fourth principle of the Cuevas-Pluvinage didactics: try as much as possible every time operations that lead us to mathematical concepts are performed, to implement the inverse process.

This activity is implemented to observe if the students, by providing them with a graphical representation, can present AM1 behaviors (coordination of the two variables) and MA2 behaviors (identify that by changing one of the variables, the other one shows a decrease or an increase).

Activity #3 and #4. These activities focus on mental action three (MA3), the quantification of change. The coordination of the amount of change in the independent variable with the amount of change in the dependent variable is carried out. In this case, the student must identify accelerating (increasing) or decelerating (decreasing) variational behavior (see Figures 1c and 1d).

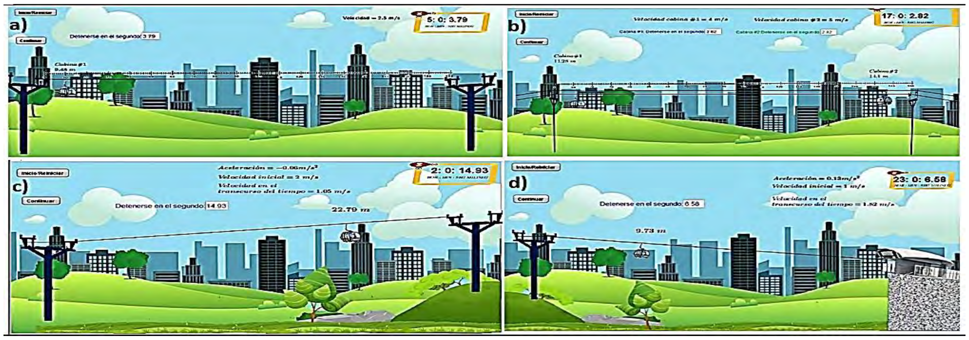


Figure 1. Scenarios used in each activity

For the particular context of this study, we have adapted the levels of covariation proposed by Carlson et al. (2002); the corresponding descriptors are shown below.

Table1. Descriptors of mental actions are used for the evaluation

Level	Description	Behaviors
Level 1 (L1) Coordination	At the coordination level, the images of covariation can support the mental action of coordinating the change of one variable with changes in the other variable (MA1)	In this case, the student must identify the different magnitudes involved in the context of the ropeway (time-hours, time-seconds, distance, speed, height), typifying the magnitudes involved in: constant, parameter, or variable. Once identified which magnitudes vary or remain constant, the student must establish a functional relationship involving the magnitudes through different forms of representation (symbolic, tabular, or graphical), which model the situation of the travel of a cabin in a section of the ropeway.
Level 2 (L2) Direction	At the direction level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the direction of change of one variable with changes in the other variable. The mental actions identified as MA1 and MA2 are both supported by L2 images.	In addition to the students showing Level 1, they should identify the direction of change, i.e., whether there is an increase or decrease in the output value (distance) while considering changes in the input value (time). When analyzing the graphical representations, the student must identify the functional relationships between the distance and time quantities. Subsequently, the student must determine which graphical representation grows or decreases faster than the other and justify such behavior.
Level 3 (L3) Quantitative Coordination	At the quantitative coordination level, the images of covariation can support the mental actions of coordinating the amount of change in one variable with changes in the other	The student identifies that the value of the distance decreases or increases (considering the difference between the distances) for each increment of time by intervals. Considering what magnitudes make them behave that way and how they behave (in our case, they consider what is

	variable. The mental actions identified as MA1, MA2, and MA3 are supported by L3 images.	happening with acceleration and velocity at that moment).

Phase 2: Teaching experiment

The research was conducted with 56 students in two groups (14-15 years old) in Mexico. Of which we considered 21 students since they were the ones who completed all the activities. Each student had a computer, Guided Learning and Exploration Sheets (GLES), and Interactive Virtual Didactic Scenarios (VIDS). The HLT comprises four activities, which correspond to four sessions of 50 minutes each; at the end of each session, the students handed in the GLES, and their answers were discussed as a group.

Phase 3: Analysis and results

In this article, we present the results of a student with the pseudonym Kenny, who was randomly selected from the sample. We will focus on making a detailed evaluation of his evolution in the levels of covariation during the activities presented. Kenny's case is an example of how the analysis was carried out for each student; reporting the results for all 21 students corresponds to later work in this report.

Activity #1:

In this first activity, Kenny partially achieved level 1 (MA1) because he failed to identify that the magnitude of the wire does not vary (see figure 2a); he also showed difficulties to identify what type of variation some magnitudes presented (see figure 2b).

It does not present any difficulty regarding the behavior of establishing a functional relationship in symbolic, tabular, and graphical form.

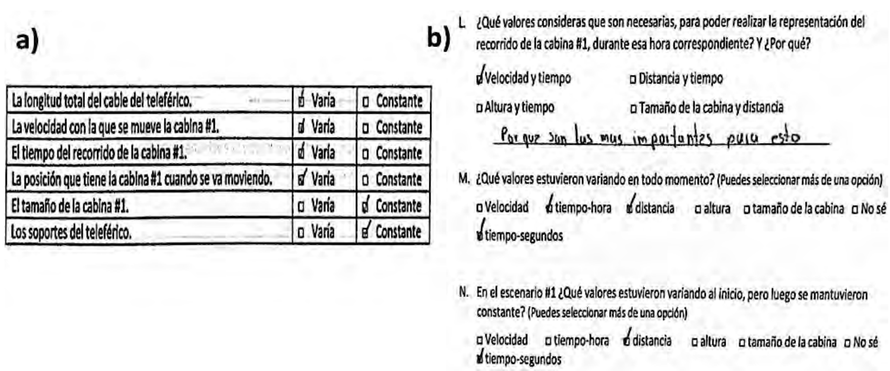


Figure 2. Kenny's response to Activity #1

Activity #2-part 1 and 2:

Kenny presents minor improvements in the behavior of MA1, identifying which magnitudes vary or which remain constant (see Figure 3a). He also shows progress in identifying magnitudes according to their type of variation. The behavior of establishing a functional relationship using different forms of representation is still present; however, we noticed that when asked to try to abstract the shape of the graph of the behavior of the phenomenon he was observing (the movement of two cabins during their ride on the cable car), Kenny opted to place points on the Cartesian plane (see Figure 3b), which shows that he needed values to be able to make this graphical representation. Therefore, Kenny has shown signs of achieving level 1.

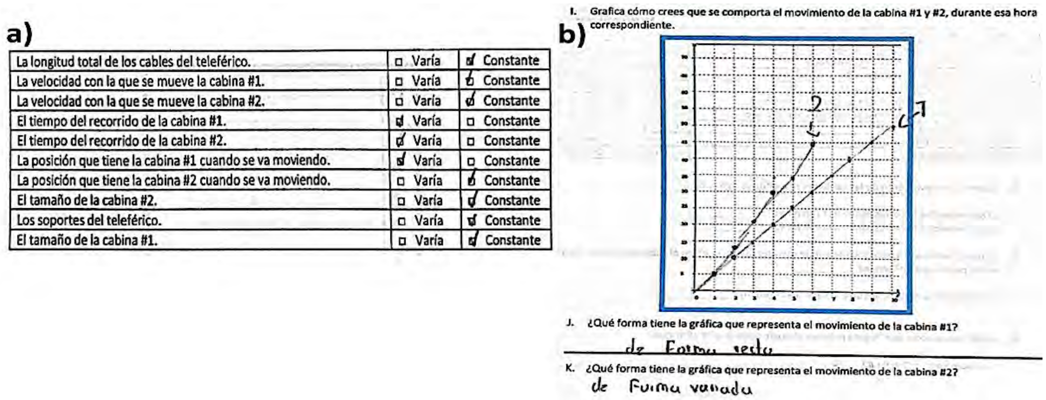


Figure 3. Kenny's response to activity #2-part 1.

Concerning MA2 behaviors, we note that Kenny manages to extrapolate and predict the distance that the cabin will travel at a specific time, which is not visible graphically (see figure 4b, section b_1). In activities #2-part 1, sections T and U (see figure 4a), and in the activity #2-part 2 (see figure 4c), Kenny manages to identify the growth pattern with the support of the graphs; we confirm the above even though in item C_1 (see figure 4c) he inverts the order of the answers. As shown in questions b_1 and b_2 (Figure 4b), it is clear that he only had confusion when exchanging the line between Booth #1 and Booth #2.

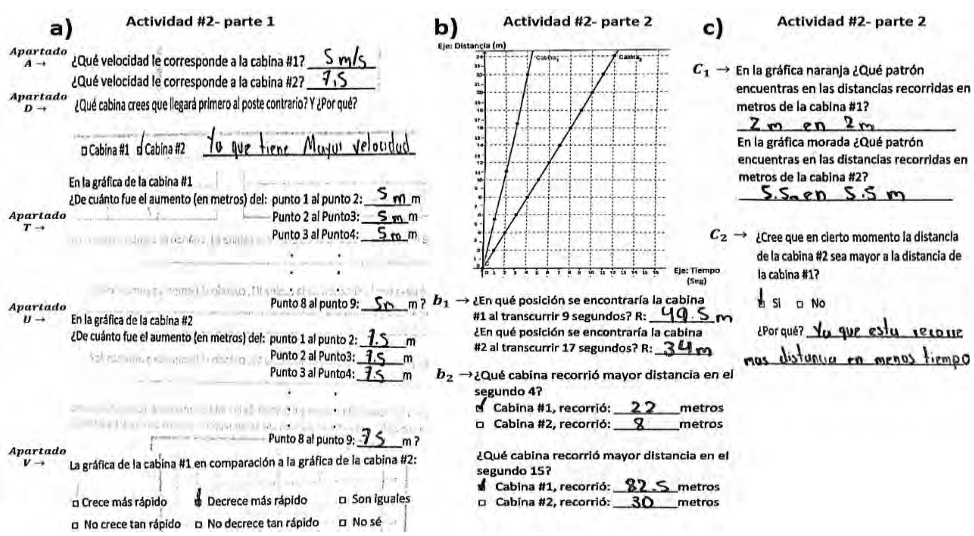


Figure 4. Kenny's response to activity #2-part 1 and 2.

Considering Kenny's confusion in the line of answer C_1 (see figure 4c), we consider as correct answer C_2 (see figure 4c) since it is sequential with answer C_1; therefore, we observe that both figure 4a and figure 4c support that Kenny identifies that one of the magnitudes causes another one to present changes of increase or decrease (see figure 4a-sections A and D and 4c-section C_2). Kenny presents difficulties when trying to select the behavior of a graph since we found that Kenny does not recognize the terms "grows or decreases faster" (see figure 4a, section V). We can conclude at this stage that Kenny shows signs of being able to reach Level 2.

Activity #3 and #4:

The evolution that Kenny has had concerning previous behaviors that presented difficulty in MA1 can be observed in activity #3 sections C, D, and E (see figure 5a), where he was able to correctly identify the type of variation that certain magnitudes presented at certain times of the cabin route, we also observe in activity #4 (see figure 5b), that Kenny shows behavior that allows him to identify the magnitudes and classify them into: constant, parameter or variable; and even manages to determine which variables are dependent on others.

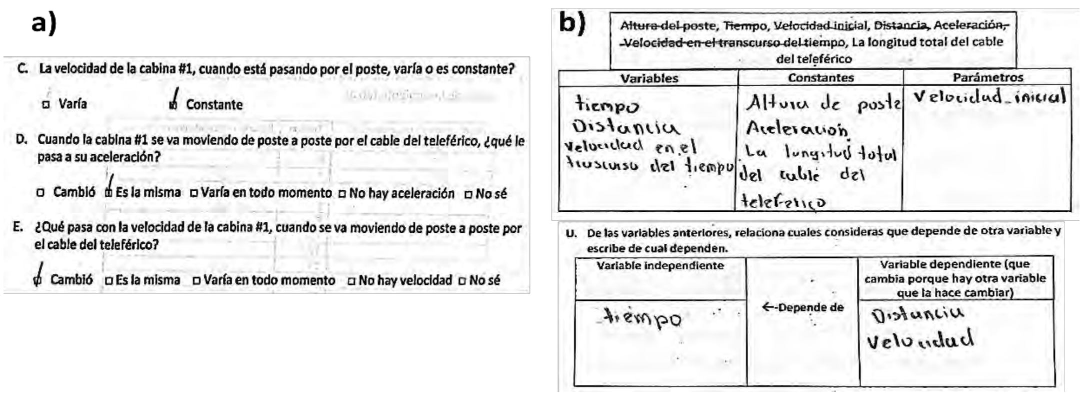


Figure 5: Kenny's response to activities #3 and #4

Another Progress of Kenny concerning MA2 behaviors is that he shows to be more familiar with the expressions "grows or decreases" and what they imply (see Figure 6a). It is worth noting that he still maintains the other MA2 behaviors previously described in the results of Activity #2-part 1 and 2 (see Figure 6b).

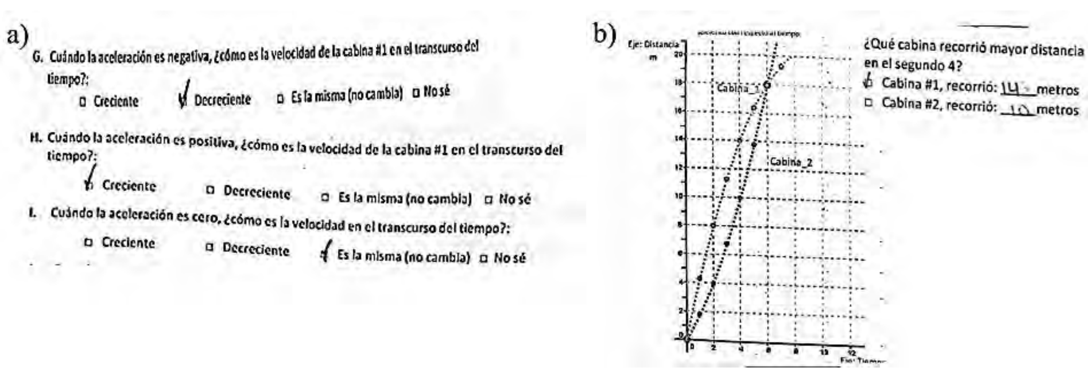
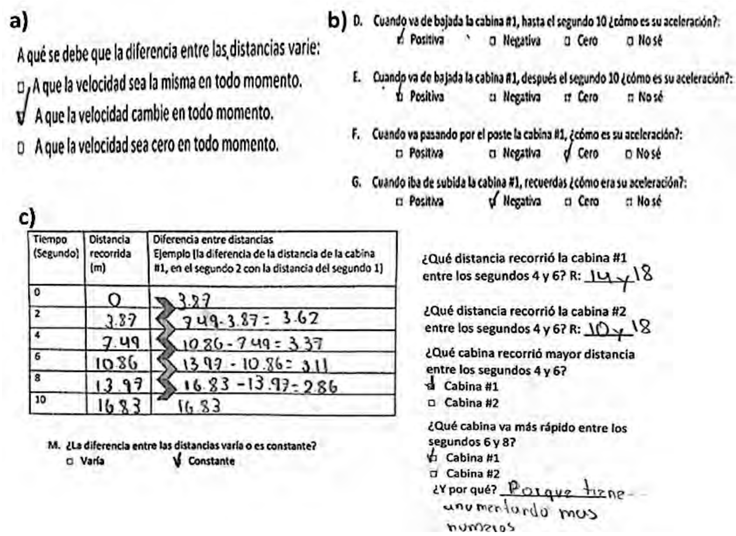


Figure 6: Kenny's response to activity #4

With all of the above, we can affirm that Kenny presents the necessary behaviors of MA1 and MA2 to place him in Level 2 of covariation.

During the analysis, we did not obtain evidence that Kenny managed to reach Level 3, despite presenting certain behaviors that allow him to identify that certain magnitudes influence others and that these cause them to behave in a certain way in certain intervals (see Figure 7a and 7b); he is not able to identify that the value of the distance decreases or increases (considering the difference between the distances) for each increment of time, by intervals (see Figure 7c).



a)

A qué se debe que la diferencia entre las distancias varie:

- A que la velocidad sea la misma en todo momento.
- A que la velocidad cambie en todo momento.
- A que la velocidad sea cero en todo momento.

b) D. Cuando va de bajada la cabina #1, hasta el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?: Positiva Negativa Cero No sé

E. Cuando va de bajada la cabina #1, después el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?: Positiva Negativa Cero No sé

F. Cuando va pasando por el poste la cabina #1, ¿cómo es su aceleración?: Positiva Negativa Cero No sé

G. Cuando iba de subida la cabina #1, recuerdas ¿cómo era su aceleración?: Positiva Negativa Cero No sé

c)

Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
0	0	3.87
2	3.87	7.49-3.87 = 3.62
4	7.49	10.86-7.49 = 3.37
6	10.86	13.97 - 10.86 = 3.11
8	13.97	16.83 -13.97 = 2.86
10	16.83	16.83

M. ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante? Varía Constante

¿Qué distancia recorrió la cabina #1 entre los segundos 4 y 6? R: 14 y 18

¿Qué distancia recorrió la cabina #2 entre los segundos 4 y 6? R: 10 y 18

¿Qué cabina recorrió mayor distancia entre los segundos 4 y 6?
- Cabina #1
- Cabina #2

¿Qué cabina va más rápido entre los segundos 6 y 8?
- Cabina #1
- Cabina #2

¿Y por qué? Porque tiene unumentando mas numeros

Figure 7: Kenny's response to activity #4

Discussion and conclusions

During the analysis, difficulties were observed in Kenny throughout the activities concerning some behaviors of the MAs, such as in the case of MA3, since there was no strong evidence of being able to coordinate the amount of change in one variable with changes in the other variable in certain intervals, the student could not advance to level 3 of covariation. These difficulties and the evolution of the behavior of each MA allowed us to determine that the student was able to reach level 2 of covariation. Overall, of the 21 students, only 71% managed to get N1, and of that group, only 24% achieved N2, thus answering our research question.

It is worth mentioning that the activities were developed face-to-face after a long period of sanitary confinement, which is a variable to consider. However, the VIDS instrumentation process did not present difficulty for the students in discovering the actions executed by each button, input box, and dynamic text.

The results of this research in progress are encouraging since the development of the activities allowed us to observe the evolution of Kenny's MA behaviors when interacting with the VIDS and making use of GLES; these MAs were designed in a graduated way, comparing and analyzing his improvements concerning some behaviors that, at the beginning of the first activity represented an obstacle for him. Our research is still in progress, and we consider these observations to project the redesign of activities and the learning trajectory towards a second research cycle.

Acknowledgments

To Conacyt and Cinvestav-IPN for funding the research project

References

Aldon, G., & Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed? ZDM Mathematics Education. 52(7), 1333–1348.https://doi.org/10.1007/s11858-020-01172-8.

Avila, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la

Variación lineal y cuadrática. Tesis de Maestría. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Bakker, A. (2018). Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events A framework and a study. EMA, 8 (2), 121-156. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Cuevas, C., & Pluvinage, F. (2003). Les projets d action pratique, elements d une ingenierie denseignement des mathematiques. . . In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8, 273–293

García, J. (2016). Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo (Doctoral dissertation), Universidad de Medellín.

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. ZDM - Mathematics Education, 53(3), 635–647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S., Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria, Escenarios, 10(1), 7-16 (2012)

Moore, K., & Carlson, M. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 48–59. doi:10.1016/j.jmathb.2011.09.001

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Compendium for research in mathematics education, 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C.. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau, 9, 2009-2010.

PROMOVIENDO EL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL CON APOYO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Helen Mariel Pérez Martínez
Cinvestav-IPN
helen.perez@cinvestav.mx

Carlos A. Cuevas-Vallejo
Cinvestav-IPN
ccuevas@cinvestav.mx

Erasmo Islas Ortiz
Cinvestav-IPN
erasmo.islas@cinvestav.mx

José Orozco-Santiago
Benemérita Universidad
Autónnoma de Puebla
jose.orozco@fcfm.buap.mx

En este artículo presentamos el desarrollo de una investigación sobre la promoción del razonamiento covariacional en estudiantes de secundaria (14-15 años) en México. El estudio consiste en el diseño y la aplicación de una secuencia de actividades didácticas que simulan de forma virtual una situación real. Las actividades se organizan mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje con apoyo de la tecnología digital y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage. Las actividades se evaluaron de acuerdo con los niveles de covariación propuestos por Carlson y colegas, categorizando los logros y las dificultades de los estudiantes para cada nivel de comprensión. Los resultados muestran que las actividades favorecen el progreso de los estudiantes al transitar de la situación de contexto hacia las diversas representaciones logrando establecer la relación entre las variables e identificar su dependencia funcional.

Palabras clave: Educación Secundaria, Tecnología, Álgebra y pensamiento algebraico.

Introducción

El pensamiento variacional ha sido interpretado como una forma de modelación de la covariación entre cantidades y magnitudes, de acuerdo con Vasco (2003):

> una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 6)

En diversas investigaciones (Carlson et al. 2002; García, 2016; Tompson y Carlson, 2017), se ha encontrado que el concepto de covariación entre variables conduce al concepto de función, debido a que la relación de covariación con frecuencia se expresa como una relación funcional. A pesar de estar presente desde el álgebra elemental hasta el cálculo, sigue siendo un tema que es una fuente de dificultades para los estudiantes; lo anterior debido a que no logran percibir y relacionar los patrones que surgen entre las cantidades involucradas en las diferentes situaciones matemáticas que se les presentan. Incluso hay estudios, como el de Aldon y Panero (2020), que han reportado casos donde la interpretación de la situación matemática propuesta al analizar las variables implicadas, los estudiantes confunden una gráfica con la trayectoria de un objeto en movimiento, de lo cual se infiere una falta de claridad en el significado de los ejes y en la interpretación de las representaciones gráficas.

Dada esa problemática, algunos estudios, como el de Vasco (2006), recomiendan que la enseñanza de la variación debe darse en una diversidad de contextos que representen para el estudiante problemas situacionales reales, que se adapten a los objetivos de aprendizaje propuestos y conduzcan al concepto de función. Sin embargo, estos contextos deben contar con ciertas características que posibiliten el alcance de dichos objetivos, tal como lo menciona Hitt (2021), las características del entorno que pueden contribuir al desarrollo de la comprensión conceptual incluyen los enfoques de los profesores, los tipos de tareas que se dan a los alumnos y el uso de una variedad de representaciones.

Por su parte, Ávila (2018) advierte de la importancia del pensamiento variacional para el concepto de función real, ya que "se observa la necesidad de establecer actividades en el aula de clases, en las que se planteen alternativas escolares que promuevan el reconocimiento de la variación en situaciones en las cuales el concepto de función está presente" (p. 198).

En nuestro estudio abordamos actividades desde un enfoque variacional-covariacional con el apoyo de la tecnología digital. En los estándares del NCTM (2000) se menciona que la tecnología enriquece la gama y la calidad de las investigaciones, ya que permite ver las ideas matemáticas desde múltiples perspectivas. El aprendizaje de los alumnos se ve favorecido por la retroalimentación que la tecnología proporciona, además ofrece a los profesores opciones para adaptar la enseñanza a las necesidades especiales de los alumnos.

Marco referencial

Pensamiento variacional

Dado que Moore y Carlson (2012) reportan la importancia del razonamiento variacional y covariacional para la capacidad de los estudiantes de modelar situaciones dinámicas, la postura que adoptamos con respecto al pensamiento variacional corresponde a la de Maury y colegas (2012), la cual se complementa con la de Moore y Carlson, ya que conciben a este pensamiento como la capacidad de identificar fenómenos de variación y cambio, para interpretarlos, describirlos, cuantificarlos, modelarlos, transformarlos y predecir sus consecuencias. Desarrollar el pensamiento variacional permite a los estudiantes identificar de manera natural fenómenos de variación y cambio; y que sean capaces de modelarlos y transformarlos, lo que contribuirá a desarrollar procesos de pensamiento matemático ligados al álgebra, las funciones y el cálculo.

Considerando que el estudio tiene como parte de su trayectoria de aprendizaje involucrar el análisis de la coordinación y la relación funcional entre variables, Asumimos como uno de sus ejes centrales *el razonamiento covariacional* el cual es definido por Carlson et al. (2002) como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (p.357).

La propuesta de Carlson y colegas consiste en el marco de las acciones mentales, el cual proporciona una taxonomía para clasificar y analizar los comportamientos de los estudiantes al abordar actividades de covariación. De acuerdo con los autores, son cinco niveles de desarrollo; sin embargo, para los fines de esta investigación y considerando el nivel académico, las actividades se diseñaron de acuerdo con los tres primeros niveles: Nivel 1 (N1), Coordinación; Nivel 2 (N2), Dirección y Nivel 3 (N3), Coordinación Cuantitativa. Estos niveles se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas en imágenes.

Didáctica Cuevas y Pluvinage

Se considera la implementación de este marco didáctico dado que establece una ingeniería didáctica para la planeación de un programa de matemáticas en un nivel post-elemental; proponiendo principios didácticos que guían el diseño de tareas; por ejemplo, iniciar las actividades mediante un problema conceptualmente rico y de interés para el estudiante, en donde sea él quíen lo resuelva, y una vez resuelto el problema se debe verificar su respuesta. Permitiendo al estudiante ser un agente de acción y conduciéndolo de manera gradual hacia el concepto matemático (Cuevas y Pluvinage, 2003).

Objetivo

Nuestro objetivo es el diseño de una secuencia didáctica que promueva la comprensión de los procesos de variación-covariación, como antecedente para el concepto de función en estudiantes de secundaria (14-15 años). Para lograrlo se proponen actividades en entornos didácticos digitales, los cuales abordan acciones mentales que estén ligados al reconocimiento de las variables y las relaciones entre ellas. Por medio de estas actividades se pretende identificar qué nivel de covariación logran alcanzar los estudiantes al interactuar con modelos matemáticos que le permitan interpretar, predecir, describir y explicar situaciones de funciones, tanto lineales como no lineales. De esta manera, podremos indagar acerca de las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes, categorizándolas y asociándolas a cada nivel de covariación.

Pregunta de investigación

¿Qué niveles de razonamiento covariacional logran alcanzar los estudiantes al interactuar con los escenarios diseñados para situaciones de covariación de funciones lineales y no lineales?

Metodología

Este estudio se desarrolla mediante una investigación basada en diseño (IBD) propuesta por (Bakker, 2018), la cual consiste en las fases de preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis de resultados. Para el diseño de la secuencia de actividades, utilizamos una trayectoria hipotética de aprendizaje (Simon, 1995) y elementos de la didáctica Cuevas-Pluvinage.

Fase 1: Preparación y diseño

El papel de juega la tecnología en este estudio es como medio de apoyo para la simulación de nuestro contexto de variación y covariación. El contexto que se utiliza para llevar a cabo cada actividad consiste en simular el trayecto de un teleférico, en donde se le solicita al estudiante analizar el movimiento de las cabinas en distintos tramos del recorrido.

A continuación, describimos el objetivo de cada actividad:

Actividad #1. Para esta actividad se toma en cuenta la acción mental uno (AM1), considerando la coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra, es decir, en este caso se atiende si el estudiante transita por un proceso en donde primero trate de identificar las diferentes magnitudes involucradas en el fenómeno: constantes, parámetros y variables. Una vez que han identificado cuáles magnitudes varian y cuales se mantienen constantes, se espera que los estudiantes establezcan una relación funcional que involucre a las magnitudes mediante diferentes formas de representación (simbólica, tabular y gráfica) (ver figura 1a).

Actividad #2 parte 1. En esta actividad se toma en cuenta la acción mental dos (AM2), en la que se considera la coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable; es decir, se observa si puede identificar la dirección del cambio, si este presenta un crecimiento o un decrecimiento en el valor de salida, mientras se consideran los cambios en el valor de entrada (ver figura 1b).

Actividad #2-parte 2. En esta actividad consideramos el cuarto principio de la didáctica Cuevas-Pluvinage: intentar en lo posible, cada vez que se realicen operaciones que nos lleven a conceptos matemáticos, implementar la operación inversa.

Se implementa está actividad con el fin de poder observar si los estudiantes, al proporcionarles una representación gráfica, pueden presentar comportamientos de la AM1 (coordinación de las dos variables) y comportamientos de la AM2 (identificar que al cambiar una de las variables la otra presenta una disminución o un aumento)

Actividad #3 y #4. Estas actividades se enfocan en la acción mental tres (AM3), en la cuantificación del cambio. Se lleva a cabo la coordinación de la cantidad de cambio en la variable independiente, con la cantidad de cambio en la variable dependiente. En este caso, el estudiante debe identificar el comportamiento variacional acelerado (cada vez más grande) o desacelerado (cada vez más pequeño) (ver figura 1c y 1d).

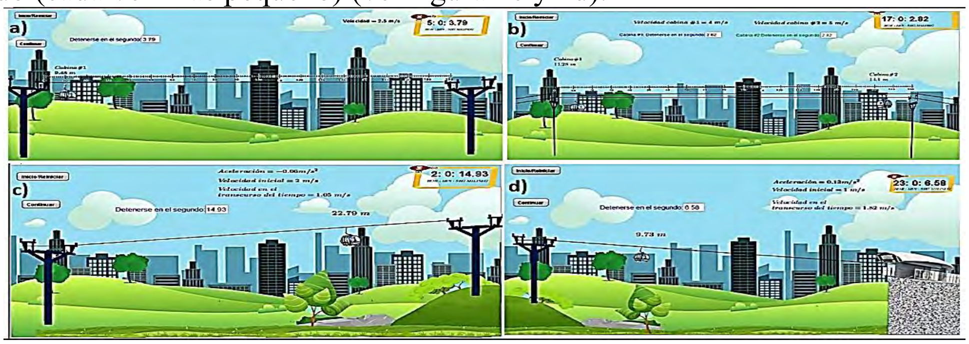


Figura 1. Escenarios empleados en cada actividad

Para el contexto de este estudio realizamos una adaptación de los niveles de covariación de Carlson et al. (2002), los descriptores correspondientes se muestran a continuación.

Tabla1. Descriptores de las acciones mentales utilizados para la evaluación

Nivel	Descripción	Comportamiento
Nivel 1 (N1) La Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)	El estudiante identifica diferentes magnitudes involucradas en el contexto del teleférico (tiempo-horas, tiempo-segundos, distancia, velocidad, altura), clasificandolas en constante, parámetro o variable. Una vez que identifica qué magnitudes varian y cuáles se mantienen constantes, el estudiante establece una relación funcional que las involucra mediante distintas formas de representación (simbólica, tabular o gráfica), las cuales modelan el recorrido de una cabina en un tramo del teleférico.
Nivel 2 (N2) La Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentas por imágenes de N2.	Además de que el estudiante muestre el Nivel 1, debe identificar la dirección del cambio; i.e. si presenta un crecimiento o decrecimiento en el valor de salida (distancia) mientras considera los cambios en el valor de entrada (tiempo). Al analizar las representaciones gráficas el estudiante debe identificar las relaciones funcionales entre las magnitudes de distancia y tiempo. Posteriormente debe identificar cuál representación gráfica crece o decrece más rápido en comparación con la otra, y justificar dicho comportamiento.
Nivel 3 (N3) Cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden	El estudiante identifica que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos.

	sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.	Considerando qué magnitudes hacen que se comporten de esa manera y su forma de comportarse (en nuestro caso que consideren que está pasando con la aceleración y la velocidad en ese momento).

Fase 2: Experimento de enseñanza

La investigación se realizó con 56 estudiantes (14-15 años) en dos grupos en México. De los cuales consideramos 21 estudiantes, que fueron los que completaron todas las actividades. Cada estudiante contaba con una computadora, hojas impresas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG), y escenarios didácticos virtuales interactivos (EDVI). La THA está conformada por cuatro actividades, las cuales corresponden a cuatro sesiones de 50 minutos cada una, al finalizar cada sesión los estudiantes entregaban las HEAG y se discutían grupalmente sus respuestas.

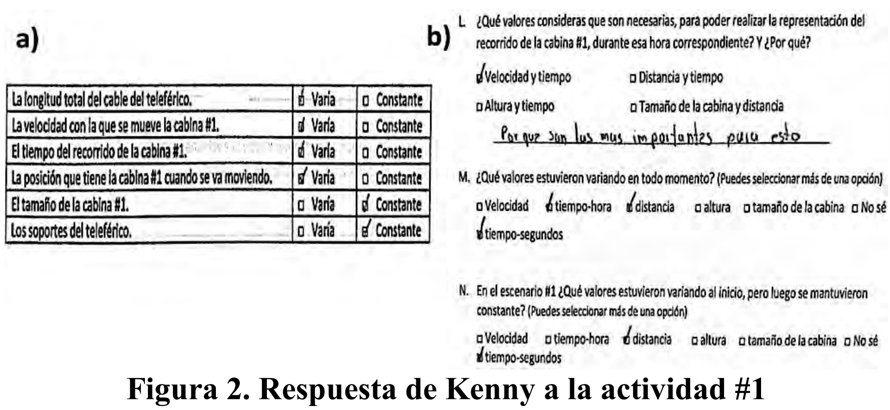
Resultados

En este artículo presentamos los resultados de un estudiante con el seudónimo de Kenny, el cual fue seleccionado aleatoriamente de la muestra y nos enfocaremos en hacer una evaluación detallada de su evolución en los niveles de covariación durante las actividades presentadas. El caso de Kenny es un ejemplo de cómo se llevó a cabo el análisis para cada estudiante, reportar los resultados de los 21 estudiantes corresponde a un trabajo posterior a este informe.

Actividad #1:

En esta primera actividad, Kenny logró parcialmente alcanzar el nivel 1 (AM1), debido a que no logró identificar que la magnitud del cable no varía (ver figura 2a), también mostraba dificultades para identificar qué tipo de variación presentaban algunas magnitudes (ver figura 2b)

En lo que respecta al comportamiento de establecer una relación funcional de forma simbólica, tabular y gráfica, no presenta dificultad.



a)

La longitud total del cable del teleférico.	☑ Varía	☐ Constante
La velocidad con la que se mueve la cabina #1.	☑ Varía	☐ Constante
El tiempo del recorrido de la cabina #1.	☑ Varía	☐ Constante
La posición que tiene la cabina #1 cuando se va moviendo.	☑ Varía	☐ Constante
El tamaño de la cabina #1.	☐ Varía	☑ Constante
Los soportes del teleférico.	☐ Varía	☑ Constante

b)

L. ¿Qué valores consideras que son necesarias, para poder realizar la representación del recorrido de la cabina #1, durante esa hora correspondiente? Y ¿Por qué?

☑ Velocidad y tiempo ☐ Distancia y tiempo

☐ Altura y tiempo ☐ Tamaño de la cabina y distancia

Por que son los mas importantes para esto

M. ¿Qué valores estuvieron variando en todo momento? (Puedes seleccionar más de una opción)

☐ Velocidad ☑ tiempo-hora ☑ distancia ☐ altura ☐ tamaño de la cabina ☐ No sé ☑ tiempo-segundos

N. En el escenario #1 ¿Qué valores estuvieron variando al inicio, pero luego se mantuvieron constante? (Puedes seleccionar más de una opción)

☐ Velocidad ☐ tiempo-hora ☑ distancia ☐ altura ☐ tamaño de la cabina ☐ No sé ☑ tiempo-segundos

Figura 2. Respuesta de Kenny a la actividad #1

Actividad #2-parte 1 y 2:

Kenny presenta pequeñas mejorías en el comportamiento de la AM1, al identificar cuáles magnitudes varían o cuáles se mantienen constantes (ver figura 3a). También presenta un progreso en identificar magnitudes según su tipo de variación. El comportamiento de establecer una relación funcional haciendo uso de diferentes formas de representación aún sigue presente, sin embargo, notamos que al solicitarle que tratara de abstraer la forma de la gráfica del comportamiento del fenómeno que estaba observando (el movimiento de dos cabinas durante su recorrido por el teleférico), Kenny opta por colocar puntos en el plano cartesiano (ver figura 3b), lo cual muestra que precisó de valores para poder realizar esa representación gráfica. Por lo tanto, Kenny ha mostrado indicos de lograr el nivel 1.

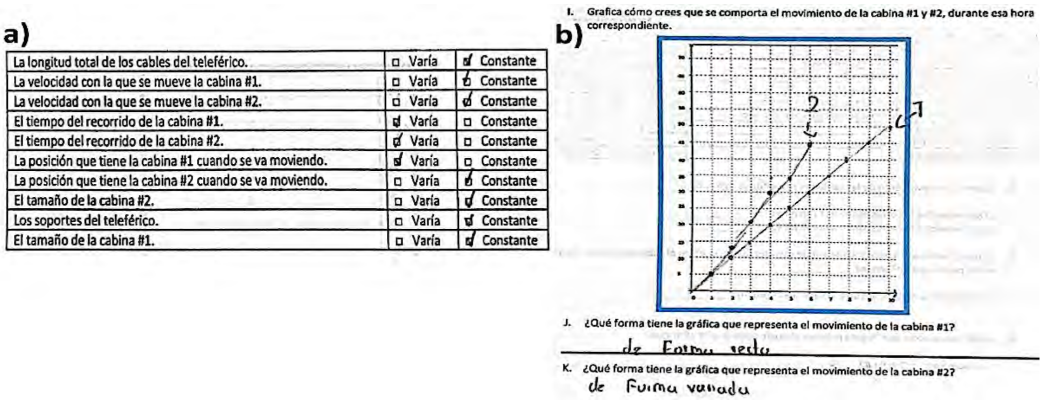


Figura 3. Respuesta de Kenny a la actividad #2-parte 1

Con respecto a los comportamientos de la AM2, notamos que Kenny logra extrapolar y predecir la distancia que recorrerá la cabina en un determinado momento, el cual no es visible de forma gráfica (ver figura 4b, apartado b_1).En las actividades #2-parte 1, apartado T y U (ver figura 4a) y en la actividad #2-parte 2 (ver figura 4c), Kenny logra identificar el patrón de crecimiento con el apoyo de las gráficas, confirmamos lo anterior a pesar de que en el item C_1 (ver figura 4c) invierte el orden de las respuestas. Por lo mostrado en las preguntas b_1 y b_2 (figura 4b) es claro que solo tuvo una confusión al intercambiar la linea entre cabina #1 y cabina #2.

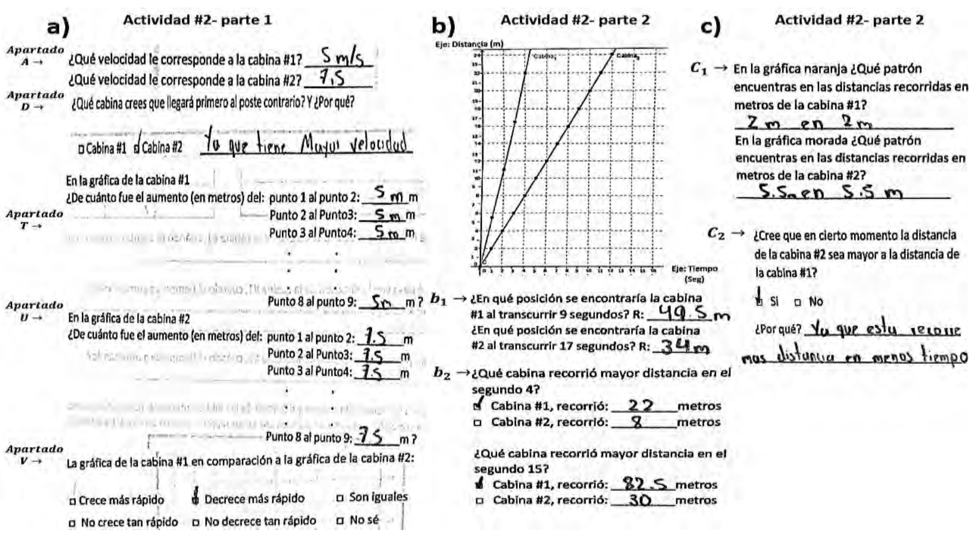


Figura 4. Respuesta de Kenny a la actividad #2-parte 1 y 2

Considerando la confusión de Kenny en la línea de la respuesta C_1 (ver figura 4c), consideramos como correcta la respuesta C_2 (ver figura 4c), puesto que es secuencial con la respuesta C_1, por lo tanto, se observa que tanto la figura 4a como la figura 4c avalan que Kenny identifica que una de las magnitudes hace que otra presente cambios de aumento o disminución (ver figura 4a -apartados A y D y 4c-apartado C_2).

Kenny presenta dificultades al tratar de seleccionar el comportamiento de una gráfica, ya que, comprobamos que Kenny no reconoce los términos“crece o decrece más rápido” (ver figura 4a, apartado V). Podemos concluir en esta etapa que Kenny, presenta indicios de poder alcanzar el Nivel 2.

Actividad #3 y #4:

La evolución que ha tenido Kenny con respecto a los comportamientos previos que presentaban dificultad en la AM1, se puede observar la actividad #3 apartados C, D y E (ver figura 5a), donde pudo identificar correctamente el tipo de variación que presentaban ciertas magnitudes en determinados momentos del recorrido de la cabina, también observamos en la actividad #4 (ver figura 5b), que Kenny presenta un comportamiento que le permite identificar las magnitudes y clasificarlas en: constante, parámetro o variable; e incluso logra determinar que variables son dependientes de otras.

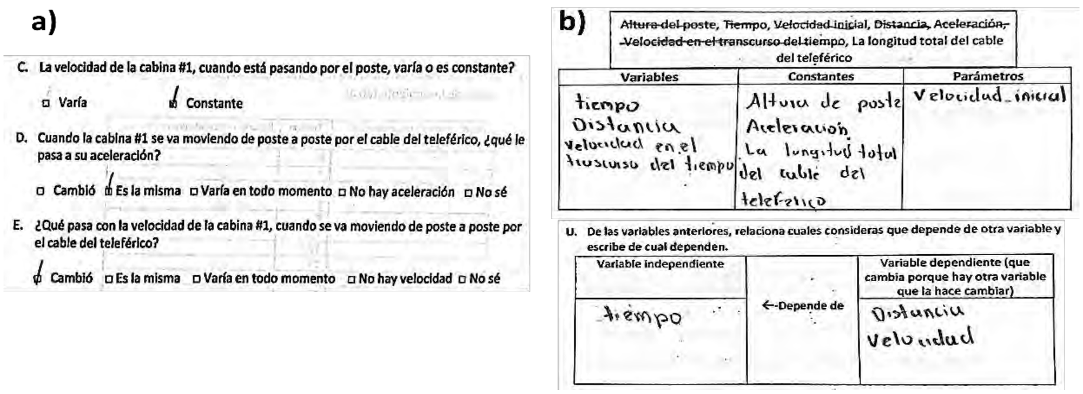


Figura 5: Respuesta de Kenny a la actividad #3 y #4

Otro Progreso de Kenny con respecto a los comportamientos de AM2 es que desmuestra estar más familiarizado con las expresiones “crece o decrece” y lo que implica cada una de ellas (ver figura 6a). Cabe destacar que aún sigue manteniendo los demás comportamientos de la AM2, anteriormente descritos en los resultados de la Actividad #2-parte 1y 2 (ver figura 6b)

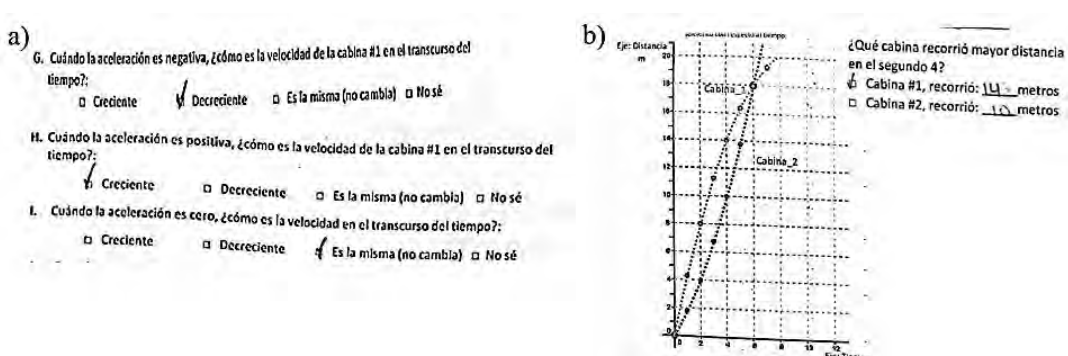
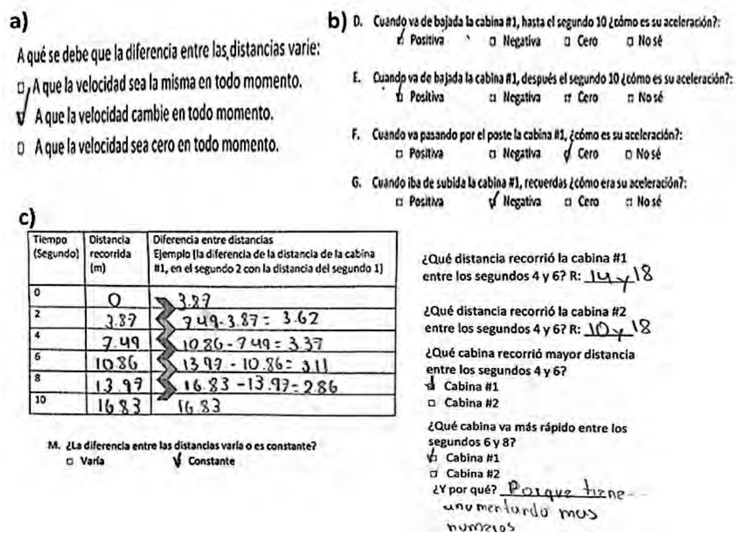


Figura 6: Respuesta de Kenny a la actividad #4

Con todo lo expresado anteriormente podemos afirmar que Kenny presenta los comportamientos necesarios de AM1 y AM2 para poder ubicarlo en el Nivel 2 de covariación.

Durante el análisis no encontramos que Kenny alcanzara el Nivel 3, a pesar de presentar ciertos comportamientos que le permiten identificar que ciertas magnitudes influyen en otras, y que estas causan que se comporten de cierta forma en determinados intervalos (ver figura 7a y 7b), no logró identificar que el valor de la distancia disminuye o aumenta (considerando la diferencia entre las distancias) por cada incremento de tiempo, por intervalos (ver figura 7c).


a)

A qué se debe que la diferencia entre las distancias varíe:

- ☐ A que la velocidad sea la misma en todo momento.
- ✓ A que la velocidad cambie en todo momento.
- ☐ A que la velocidad sea cero en todo momento.

b)

D. Cuando va de bajada la cabina #1, hasta el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
✓ Positiva ☐ Negativa ☐ Cero ☐ No sé

E. Cuando va de bajada la cabina #1, después el segundo 10 ¿cómo es su aceleración?:
✓ Positiva ☐ Negativa ☐ Cero ☐ No sé

F. Cuando va pasando por el poste la cabina #1, ¿cómo es su aceleración?:
☐ Positiva ☐ Negativa ✓ Cero ☐ No sé

G. Cuando iba de subida la cabina #1, recuerdas ¿cómo era su aceleración?:
☐ Positiva ✓ Negativa ☐ Cero ☐ No sé

c)

Tiempo (Segundo)	Distancia recorrida (m)	Diferencia entre distancias Ejemplo (la diferencia de la distancia de la cabina #1, en el segundo 2 con la distancia del segundo 1)
0	0	3.87
2	3.87	7.49-3.87 = 3.62
4	7.49	10.86-7.49 = 3.37
6	10.86	13.97 - 10.86 = 3.11
8	13.97	16.83 -13.97 = 2.86
10	16.83	16.83

M. ¿La diferencia entre las distancias varía o es constante?
☐ Varía ✓ Constante

¿Qué distancia recorrió la cabina #1 entre los segundos 4 y 6? R: 14 y 18

¿Qué distancia recorrió la cabina #2 entre los segundos 4 y 6? R: 10 y 18

¿Qué cabina recorrió mayor distancia entre los segundos 4 y 6?
✓ Cabina #1
☐ Cabina #2

¿Qué cabina va más rápido entre los segundos 6 y 8?
✓ Cabina #1
☐ Cabina #2
¿Y por qué? Porque tiene aumentando mas numeros

Figura 7: Respuesta de Kenny a la actividad #4

Discusión y conclusiones

Durante el análisis se observaron dificultades que se presentaron en Kenny a lo largo de las actividades con respecto a algunos comportamientos de las AM, tal es el caso de la AM3, dado que no se encontraron indicios contudenetes de poder coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra variable en determinados intervalos, el estudiante no pudo avanzar hacia el nivel 3 de covariación. Estas dificultades y su evolución de comportamientos de cada AM, nos permitieron determinar que el estudiante logró alcanzar el nivel 2 de covariación. De forma general de los 21 estudiantes solo el 71% logro alcanzar el N1 y de ese grupo solo el 24% logro el N2 con lo cual damos respuesta a nuestra pregunta de investigación.

Cabe mencionar que las actividades se desarrollaron de forma presencial después de un largo periodo de confinamiento sanitario, lo cual es una variable a considerar. Sin embargo, el proceso de instrumentación de los EDVI no presentó dificultad en los estudiantes al descubrir las acciones ejecutadas por cada botón, casillas de entrada y textos dinámicos.

Los resultados de esta investigación en proceso son alentadores, ya que el desarrollo de las actividades permitió observar la evolución de los comportamientos de las AM de Kenny al interactuar con los EDVIs, haciendo uso de HEAG, estas AM se diseñaron de forma graduada, comparando y analizando sus mejorías con respecto a algunos comportamientos que, al inicio de la primera actividad representabán un obstáculo para él. Nuestra investigación sigue en desarrollo y consideramos estas observaciones para proyectar el rediseño de actividades y de la trayectoria de aprendizaje hacia un segundo ciclo de investigación.

Agradecimientos

A Conacyt y a Cinvestav-IPN por financiar el proyecto de investigación

Referencias

Aldon, G., y Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed? ZDM Mathematics Education. 52(7), 1333–1348.https://doi.org/10.1007/s11858-020-01172-8.

Avila, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la

Variación lineal y cuadrática. Tesis de Maestría. Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Bakker, A. (2018). Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events A framework and a study. EMA, 8 (2), 121-156. Journal for Research in Mathematics Education, 33(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Cuevas, C., y Pluvinage, F. (2003). Les projets d action pratique, elements d une ingenierie denseignement des mathematiques. . . In Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8, 273–293

García, J. (2016). Desarrollo del razonamiento covariacional, en la conceptualización de la función lineal a través de software interactivo (Doctoral dissertation), Universidad de Medellín.

Hitt, F., y Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: representations and actions by students in action. ZDM - Mathematics Education, 53(3), 635–647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Maury, E., Palmezano, G., Cárcamo, S., Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5° grado de educación básica primaria, Escenarios, 10(1), 7-16 (2012)

Moore, K., y Carlson, M. (2012). Students' images of problem contexts when solving applied problems. The Journal of Mathematical Behavior, 31, 48–59. doi:10.1016/j.jmathb.2011.09.001

National Council for Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Thompson, P. W., y Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. Compendium for research in mathematics education, 421-456. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C.. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau, 9, 2009-2010.