PROMOTING PROPORTIONAL REASONING WITH THE SUPPORT OF DIGITAL TECHNOLOGY

Erasmo Islas Ortiz
Cinvestav
erasmo.islas@cinvestav.mx

Carlos A. Cuevas-Vallejo
Cinvestav
ccuevas@cinvestav.mx

José Orozco-Santiago
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
jose.orozco@fcfm.buap.mx

In this report, we present an advance of doctoral research. We explore teaching alternatives that promote proportional reasoning in Mexican students between 14 and 15 years old with the support of digital technology. We designed a sequence of activities that pretends to signify the concepts of ratio and proportion in their diverse representations and from the perspective of linear functions. For the design of the tasks, elements of the Realistic Mathematics Education framework and Cuevas-Pluvinage Didactics were used. The learning objectives and proposed activities were organized through a hypothetical learning trajectory. Subject to presenting the group results, we randomly selected a student to present the analysis of the results achieved. We found that the tasks promoted proportional reasoning.

Keywords: High School Education, Technology, Rational Numbers & Proportional Reasoning

Introduction

The concepts associated with proportional reasoning, such as fraction, ratio, and proportion, are essential in mathematics education at basic levels since they are pillars of higher mathematics because their application is transversal to other disciplines (Lamon, 2007). Given the importance of the problem, we agree with several studies (Lesh et al., 1988; Adjiage & Pluvinage, 2007) that the lack of success in the handling of ratios and proportions is caused by poor development of proportional skills, as well as an excessive arithmetization of the processes involved. As a consequence of the lack of sense in dealing with proportional situations in the classroom, a tendency of students to apply the proportional model in situations where it is not applicable has been observed, which has been called the illusion of linearity (De Book et al., 2002).

The problem facing the community is how to teach students to reason proportionally. The most frequent school approach to proportionality is from an arithmetic perspective, separating it from its links with functional relationships and their multiple representations. In our proposal, we rescue the results of research in this line and test a teaching design based on a functional approach through realistic contexts and supported by digital technology, with which we hope to obtain ideas that contribute to the design of activities that promote proportional reasoning.

Theoretical framework

The Realistic Mathematics Education (RME) teaching approach emphasizes that real situations are fundamental for learning mathematics since mathematics is part of a historical and cultural construction (Freudenthal, 2002). In this current, students are active participants in developing their learning and constructing models that mathematize reality from an everyday context (Gravemeijer, 2004). In RME, two types of mathematization are identified: horizontal mathematization, where students move from the real to the symbolic of responding to problems in their context; and vertical mathematization, where students make conceptual connections and create strategies to solve problems within the mathematical system, which may or may not refer to the initial context. That is, they detach from the context towards the path of abstraction and generalization (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2020).

As for proportional reasoning, we start from the definition of Lesh et al. (1988):

> Proportional reasoning is a form of mathematical reasoning that involves a sense of co-variation and of multiple comparisons, and the ability to mentally store and process several pieces of information. Proportional reasoning is very much concerned with inference and prediction and involves both qualitative and quantitative methods of thought. (p. 93)

According to this rationale, we assume as valid the proportional reasoning model proposed by Modestou & Gagatsis (2010) and recognize the need for research invoked by the studies on the illusion of linearity by De Bock et al. (2002). In our study, we identify proportional skills as those faculties considered necessary for a person to possess sound proportional reasoning. Lobato et al. (2010) and Weiland et al. (2021) indicate that these skills should include: 1) Attending to and coordinating two quantities that vary dependently, 2) Recognizing and using the structures of proportional situations (unit ratio, constant of proportionality, linearity), 3) Identifying the invariant in a proportion, 4) Understanding proportionality from multiple representations, 5) Distinguishing linear from nonlinear situations. We consider these five skills as key to our study, and they are the ones we invoke with the term proportional skills.

To encompass the theoretical framework and structure of the intervention, we rely on the Design-Based Research (DBR) approach proposed by Bakker (2018). Since DBR design and innovation in the classroom are vital aspects, digital technology is proposed to allow students to interact with multiple representations, facilitate the simulation of realistic situations, and test their results in Virtual Interactive Didactic Scenarios (VIDS).

To organize the design of the tasks that guide students in the mathematization process, we rely on the Hypothetical Learning Trajectory (HLT) (Simon, 1995). For the design of the activities that integrate each task, we rely on the Cuevas-Pluvinage didactic framework, which provides didactic engineering that rescues several didactic principles of the active school and Piaget and adapts them to mathematics education (Cuevas & Pluvinage, 2003).

We agree with Sierpinska (2004) that "reporting tasks is necessary to probe the effectiveness of the teaching approach" (p. 13). According to the author, the problematization, justification, and discussion of the tasks begin with the a priori analysis of the design. However, the problematization is even more substantial and fruitful in the a posteriori analysis, that is, after the experimentation in the classroom. In this order of ideas, in this report, we show the problematization both in the design phase and the retrospective analysis phase since it provides guidelines for redesigning our tasks.

One of the most complex tasks for a teacher is implementing constructivist didactic principles in a traditional classroom with the usual elements. For example, introducing a mathematical concept through the problematization of an everyday situation in a conventional classroom is almost impossible. A possible solution is to have a virtual scenario that simulates a real phenomenon, in which students can interact with various contexts dynamically, and, in addition, its use allows the construction of mathematical knowledge (Moyer et al., 2016). In this way, students are endowed with the opportunity for action, where each student can learn at their own pace. Digital technology provides the student and the teacher with a portable laboratory using various devices, such as cell phones, tablets, or computers.

The above considerations lead us to the research question: How to design a didactic sequence, in realistic contexts mediated by technology, that helps students to develop their proportional reasoning and allows them to progress in the mathematical levels of RME?

Methodology

Based on our methodological framework, the DBR approach consists of the following phases: preparation and design, teaching experiment, and retrospective analysis.

Preparation and design phase

The following were designed and developed in this phase: 1) A pretest to collect students' prior knowledge. 2) A HLT who leads the teaching process and sets the learning objectives. 3) Three sequences of didactic activities with their respective VIDS: "Naranjada", "Zoom Totoro" and "Autos". 4) A survey to inquire about the students' perspectives on their experience using the VIDS and the Guided Learning and Exploration Sheets (GLES) activities. The pretest and final survey were hosted on Google forms to answer at home to save classroom time.

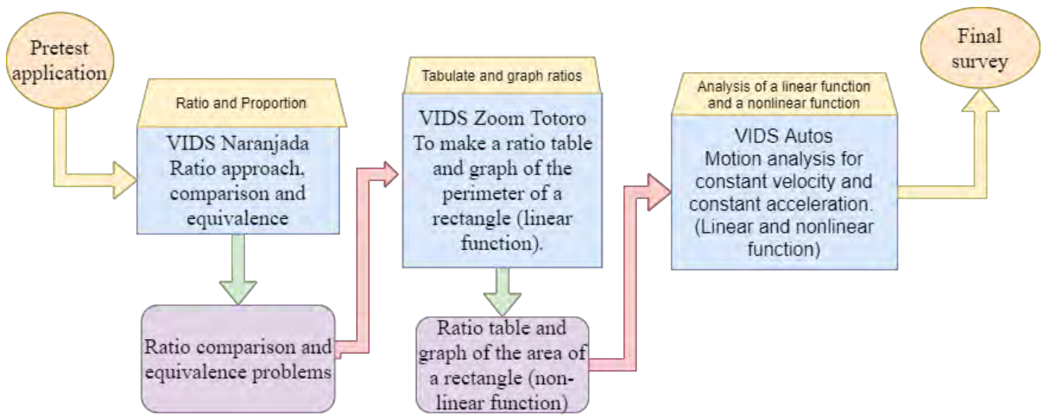

Figure 1: Design of the didactic pathway guiding the instructional sequence

Task 1. The task's context is to compare proposals for mixing orange juice and water (see Figures 2a and 2b). The objective is for students to learn: to pose, compare and determine equivalence between ratios, as well as to generate tables of equivalent ratios and identify the constant of proportionality. Finally, an extra activity is performed to apply the knowledge learned in a different context. The activities are: 1) Expressing a ratio in different notations, e.g., three glasses of juice for every five glasses of water: 3 to 5, 3:5 and 3/5. 2) Coordinate the covariation between two variables; given a ratio of A glasses of orange to every B glasses of water, the taste is more intense orange if A increases or B decreases. 3) Comparison of two ratios, given two random orangeade proposals with orange to water ratios A:B and C:D, determine which will have an intense orange flavor.

Task 2. The task consists of performing a "zoom" effect to reduce or increase an image of Totoro figures according to a similarity ratio entered in an input box (see Figure 2c). The objective is for students to perform similarity activities using the constant of proportionality. Also, it is intended to address the problem of the illusion of linearity by tabulating and graphing the ratio-perimeter (linear) and ratio-area (quadratic) relationships to lead students to compare both models.

Task 3. The task's context is to visualize a car moving at a constant speed above the allowed limit and a patrol car initiating a chase with constant acceleration as the car passes (see Figure 2d). The objective is for students to interact with the VIDS as they describe, analyze, and compare the characteristics of the two motions, i.e., uniform rectilinear motion (URM) and uniformly accelerated rectilinear motion (UARM). Students must identify the models present (linear and quadratic) and compare them as they transit between their representations.

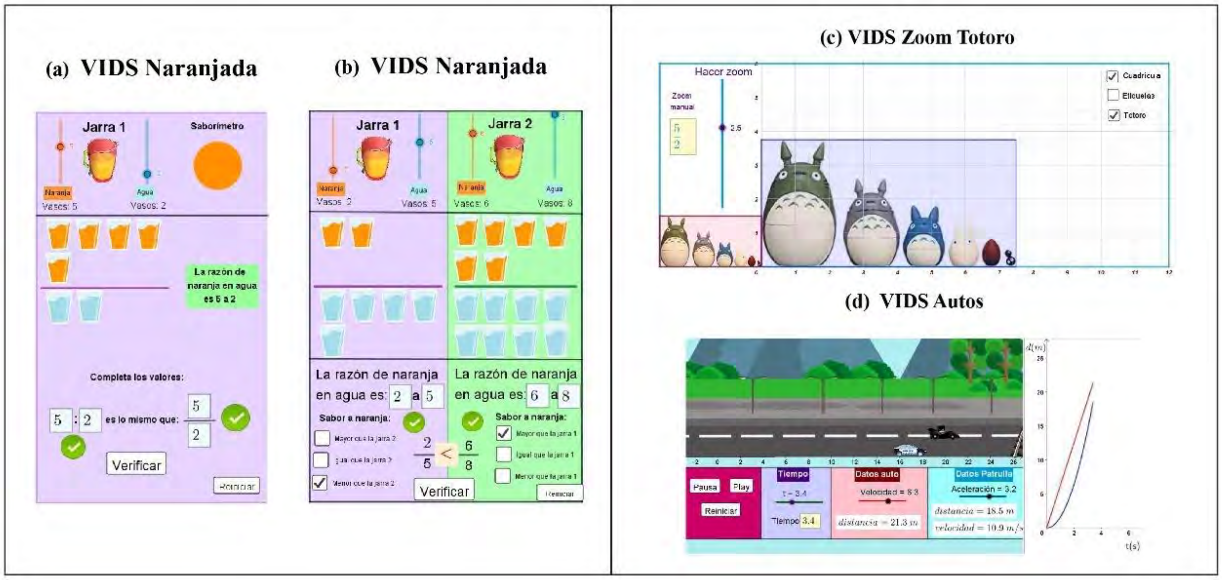

Figure 2. VIDS used in the teaching sequence

Teaching experiment phase

The study was performed through a face-to-face intervention in two groups in a secondary school in Mexico. Thirty-five students (14-15 years old) participated in the study in the winter of 2021. The instruction was divided into three 90-minute sessions in a computer room at the school. Each student had a personal computer that had VIDS preloaded, and each student had their respective GLES. The first author conducted the intervention, supported by the group's teacher and a research assistant. During the sessions, collaborative learning was promoted, and the answers were discussed as a group.

Results and retrospective analysis

According to Freudenthal (2002), the context and didactic design should allow students to move from horizontal mathematization to vertical mathematization. Gravemeijer (2004) identifies four levels towards vertical mathematization: N1) Situational level. Reality is interpreted and organized through informal and context-dependent mathematical reasoning (horizontal mathematization). N2) Referential level. Schemes and models that make sense within the initial context are created, and vertical mathematization begins with the emergence of "models of...". N3) General level. Concepts are related, strategies separated from the context are generated, reasoning occurs in the mathematical world, and "models for..." emerge. N4) Formal level. Concepts are understood by employing their mathematical symbolism, support from a real context is no longer needed, and reflection has moved to the mathematical world.

Subject to presenting the whole group's results, we randomly selected one student, whom we will call Lucy. Based on this student's findings, we will present a detailed analysis of the results of the tasks and the evaluation of the levels of vertical mathematization proposed in the RME.

Results of Task 1. "Naranjada"

Lucy uses her previous knowledge to perform the activities, i.e., the activities lead her to a horizontal mathematization, correctly assimilating the three notations for ratio. In addition, she found that in a random proposal of orange and water mixture, the intensity of flavor depends on a covariation process. At this stage, Lucy is at the situational level because she moves within the numerical world only to interpret the context and make a judgment. The horizontal mathematization is coming and going from the context to the mathematical world.

One finding occurred when the virtual scenario showed Lucy the following pair of orange to water ratios: 2:7 and 3:8 (see Figure 4a). Lucy mentally performed a 1-to-1 bijection between the glasses of orange and the glasses of water. Once the bijection was done, when the same number of glasses of water remained unassociated in both scenarios, Lucy intuitively responded that the two have the same taste, i.e., the same ratio. This erroneous way of comparing ratios, analogous to the erroneous additive principle, she extended to all situations, and it worked for her when the remaining glasses of water were different. However, when the remaining glasses of water were the same, the virtual scenario pointed out the error, which was incomprehensible to Lucy. At the close of the session, through group discussion, methods for comparing ratios were specified, and it was found that most students adopted the reasoning described. Some students were even surprised that the method failed. Since this exact situation was present in most students, we will call it a "proportionality illusion".

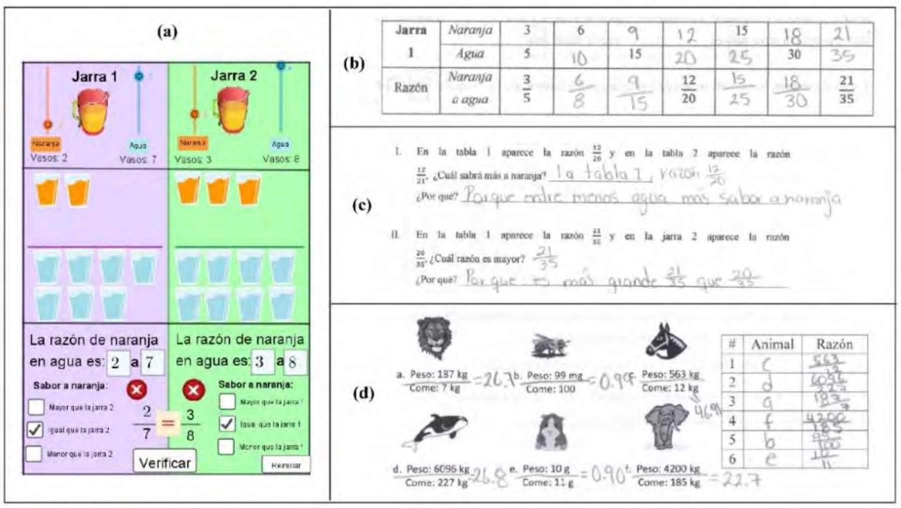

Figure 3. Evidence of the activities corresponding to Task 1.

The activity of completing tables of equivalent ratios is subject to the context (orange-water mixtures in the same proportion), but the multiplicative pattern that Lucy uses to fill the table is given in the mathematical domain; it is also observed that at the beginning, the additive reasoning persists (see Figure 3b). One way to compare equivalent ratios in the tables is to consider pairs of ratios that have equal numerators or denominators, and Lucy uses that fact (see Figure 3c) to make numerical judgments and gives a covariation argument based on the denominator of the ratios, so a referential level is evident.

Lucy uses the unit ratio method in application exercises in a context other than mixtures. Figure 3d shows a ratio ordering exercise (adapted from Lamon, 2020), which consists of ordering a set of animals about their weight. Lucy applies the unit ratio method to solve these problems. It is inferred that she has acquired a "model for" and progress from the referential level to the general level is glimpsed.

In this task, Lucy shows skills in posing ratios in different notations, comparing ratios, applying the multiplicative principle to obtain equivalent ratios, and using the unit ratio method to solve practical problems. At this level, students already possess proportional reasoning skills.

However, the data show that Lucy had a rootedness in additive reasoning in her knowledge structure, which she managed to modify and even consolidate the unit ratio method.

Results of task 2. "Zoom Totoro"

In the initial stage, processes of observation, measurement, and multiplicative principle are involved. The activity of calculating the dimensions of the image for different ratios is anchored to the context (situational level); however, following the pattern marks the way to the referential level since Lucy notices that to obtain the measurements of the replicated image, the measurements of the original image are multiplied by the similarity ratio (see table in Figure 4a).

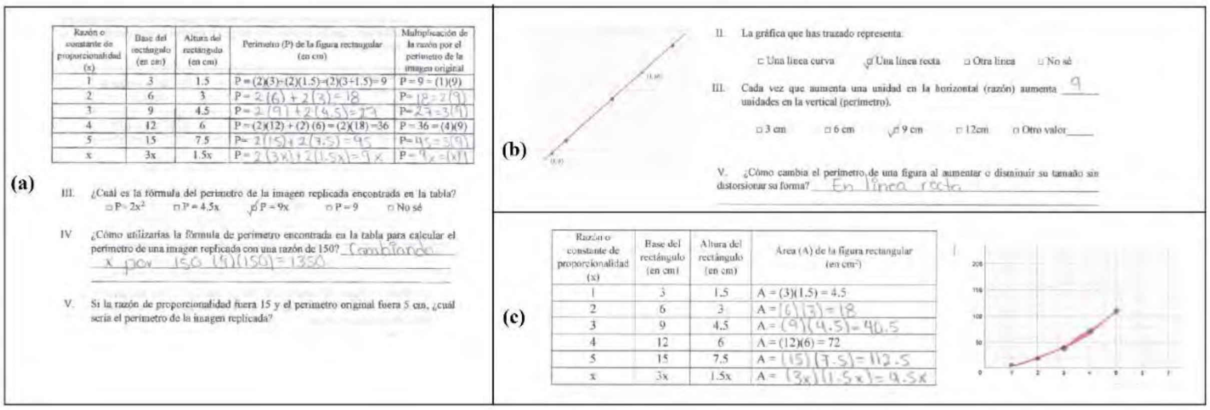

Figure 4. Evidence of the activities corresponding to Task 2.

In the table for calculating the perimeter of magnified images according to a similarity ratio, Lucy relies on the dimensions table. She departs from the context because the initial concept is related, in the first instance with the perimeter and the second with the area. Lucy calculates the perimeters for the proposed ratios by following the initial example in the table until she arrives at the linear expression P=9x and applies the "model of" found (see Figure 4a). To plot the ratio-perimeter relationship, Lucy transits between the tabular-graphical representations and manages to see the linear variation (see Figure 4b). As for the ratio-area relationship, she completes the table and makes the graph, describing it as curved (see Figure 4c). However, she does not conclude in the "model of" sought (a quadratic relationship) and does not get to the contrast between perimeter and area.

In performing this task, Lucy showed the ability to move between tabular, graphical and algebraic representations of proportionality; identifying the value of the constant of proportionality in the case of perimeter, and also obtaining a model that describes the particular case. However, Lucy is not able to arrive at a general model.

Results of task 3. "Autos"

Initially, the activities in this VIDS, are of instrumentation and contextualization. Lucy identifies the characteristics of movements, both at a constant speed and constant acceleration. Her previous and informal ideas about such concepts were modified after interacting with the VIDS and observing the change in the variables, their relationship, and numerical observations.

As shown in Figure 5c, Lucy transitions correctly between tabular and graphical representations and identifies linear and nonlinear features in both the graph and tables. In this task, Lucy sees relationships between variables that go beyond the initial context by identifying a "model of", using it, and concluding that the variation is proportional (in the car) and quadratic (in the patrol car); also, she distinguishes linear and nonlinear behaviors in the representations. However, Lucy failed to propose a model for constant acceleration.

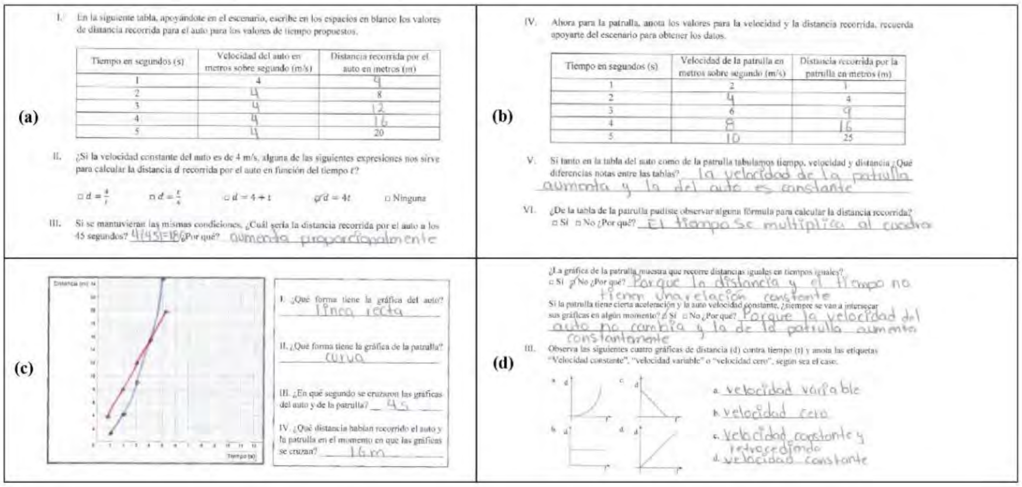

Figure 5. Evidence from Task 3 activities.

By visualizing and comparing the graphs of the movements for various parameters of speed and acceleration, Lucy interprets growth and variation, arguing: "if equal distances are traveled in equal times, distance and time have a constant relationship", and that the growth of acceleration will always exceed that of speed because "the speed of the car does not change and that of the patrol car is constantly increasing" (see Figure 5d). In Lucy's reasoning, we observe a conceptual enrichment that transcends the context, and although they are not numerical or algebraic manipulations, they are of a general nature. They are general reasonings that apply to any URM and UARM context. In the words of Freudental (2002), "The relationship between constant ratio and linearity is a feat of vertical mathematization" (p.43).

In performing this task, Lucy shows the ability to distinguish a linear situation from a nonlinear situation and identify the distinctive features of each in different representations. Thus, she shows clear progress in her proportional reasoning.

Discussion and conclusion

In Task 1, Lucy had difficulties comparing two ratios whose difference between numerator and denominator was the same, 2/7 and 3/8; that idea changed with the task. We infer that there are difficulties in students' understanding that emerge with this activity. According to Sierpinska (2004), "tasks should be able to reveal students' most hidden misconceptions" (p. 14). In Task 2, the objective is to confront the illusion of linearity regarding the confusion students present when assuming that area and volume have a linear relationship with the similarity ratio. However, the activities do not prove to be sufficient and should be redesigned. It is necessary to add geometric figures so that students distinguish the linear relationship of the perimeter with the quadratic relationship of the area and the cubic relationship of volume in a more playful geometric way. In Task 3, the detailed analysis of Lucy's responses sets the tone for more in-depth activities that bring out the "models for" and generalization.

The detailed analysis of Lucy's answers in each task shows us the learning she acquires to work with ratios, move between proportional representations and contrast them with non-linear phenomena in different contexts. The above gives us elements to answer our research question and gives us sufficient guidelines for redesigning the activities organized by the HLT. On the other hand, it provides us with enough evidence to discern which of the tasks should be deepened in order to achieve that students show better progress in the levels of vertical mathematization. That is to say, the diversity of contexts favors horizontal mathematization. Considering the times in the curriculum, the designers of didactic sequences must discern what is most convenient in each situation since reducing the number of contexts could increase the opportunity to achieve greater depth in the mathematization process. In this sense, we consider that there is also a need for fully mathematized activities without reference to any context that deals with the formal level.

In this development research, we try to find teaching ways to address the concepts involved in proportional reasoning through approaches to linear functions and their representations (symbolic, tabular, and graphical). In this sense, the first axis of the proposal is to prioritize the concept of ratio as a precursor to accessing equivalence, comparison, and ratio tables, which leads inexorably towards linear functions; the second axis is that the student faces diverse contexts to explore proportional situations in their different representations and the third axis consists of considering the phenomenon of the illusion of linearity. It is intended that students experience realistic situations, both linear and nonlinear, and question linearity (or the absence of it) each time they face a problem, reacting in a reasoned manner according to the characteristics of the situation.

Concerning the influence of technology in the study, it is clear that its use makes it possible to simulate and replicate everyday situations that can be problematized and provide pragmatic and epistemic advantages. For example, the use of VIDS makes it possible to present random data to the student, interact with contexts dynamically, show mathematical objects in different representations and validate results. As described in the analysis, the students' experience with VIDS made it possible to observe misconceptions that would go unnoticed, probably in traditional forms of teaching. On the other hand, interacting with the VIDS provoked an interest that went beyond the mathematical context posed, involving them with problems derived from the tasks.

The results are not conclusive; however, they encourage us to continue this work. It is necessary to mention that we had an external variable to consider since the students were returning to face-to-face classes after a long pandemic period.

References

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149–175. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Cuevas, C. A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 273-292.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 311-334. https://doi.org/10.1023/a:1021205413749

Freudenthal, H., (2002) Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer, Dordrecht

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Towards a Theoretical Framework for Research. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content 83 and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge, 2020.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J. E., Ellis, A. B. & Charles, R. I. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics in Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36-53. https://doi.org/10.1080/10986060903465822

Moyer-Packenham, P. S., Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. En Moyer-Packenham, P. (Eds.) *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 7. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1

Sierpinska, A. (2004). Research in Mathematics Education through a Keyhole: Task Problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7–15. http://www.jstor.org/stable/40248450

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Van den Heuvel-Panhuizen M (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1):9–35

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713–717). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. & Burke, J. (2021) Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *J Math Teacher Educ*, *24*, 179–202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

PROMOVIENDO EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL CON APOYO DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL

Erasmo Islas Ortiz
Cinvestav
erasmo.islas@cinvestav.mx

Carlos A. Cuevas-Vallejo
Cinvestav
ccuevas@cinvestav.mx

José Orozco-Santiago
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
jose.orozco@fcfm.buap.mx

En este artículo presentamos un avance de investigación doctoral en donde exploramos formas alternativas de enseñanza que promuevan el razonamiento proporcional en estudiantes mexicanos entre 14 y 15 años, con apoyo de la tecnología digital. Diseñamos una secuencia de actividades que pretende significar los conceptos de razón y proporción, en sus diversas representaciones y desde la perspectiva de las funciones lineales. Para el diseño de tareas se emplearon elementos del marco de la Educación Matemática Realista y de la Didáctica de Cuevas-Pluvinage. Los objetivos de aprendizaje y las actividades propuestas fueron organizadas mediante una trayectoria hipotética de aprendizaje. A reserva de presentar los resultados del grupo, seleccionamos aleatoriamente a una estudiante para presentar el análisis de los resultados obtenidos. Encontramos que las tareas promovieron un razonamiento proporcional.

Palabras clave: Educación secundaria, tecnología, números racionales y razonamiento proporcional

Introducción

Los conceptos asociados al razonamiento proporcional, tales como fracción, razón y proporción son clave en la educación matemática en los niveles básicos, ya que son pilares de las matemáticas superiores y su aplicación es transversal a otras disciplinas (Lamon, 2007). Dada la importancia de la problemática, coincidimos con diversos trabajos (Lesh et al., 1988; Adjiage y Pluvinage, 2007), en que la falta de éxito en el manejo de las razones y proporciones es causada por un pobre desarrollo de las habilidades proporcionales, así como una excesiva aritmetización de los procesos involucrados. Como consecuencia a la carencia de sentido al abordar situaciones proporcionales en el aula, se ha observado una tendencia de los estudiantes a aplicar el modelo proporcional en situaciones donde no es aplicable, lo que se ha denominado ilusión de la linealidad (De Book et al., 2002).

El problema al que se enfrenta la comunidad es cómo enseñar a los estudiantes a razonar proporcionalmente. El acercamiento escolar más frecuente hacia la proporcionalidad se da desde una perspectiva aritmética, separándola de sus vínculos con las relaciones funcionales y sus múltiples representaciones. En nuestra propuesta rescatamos los resultados de investigación en esta línea y ponemos a prueba un diseño de enseñanza basado en un acercamiento funcional mediante contextos realistas y apoyado en la tecnología digital; con lo cual, se espera obtener ideas que aporten al diseño de actividades que promuevan el razonamiento proporcional

Marco teórico

El enfoque de enseñanza de la Educación Matemática Realista (EMR) destaca que las situaciones realistas son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas, ya que las matemáticas son parte de una construcción histórica y cultural (Freudenthal, 2002). En esta corriente, los estudiantes son participantes activos en el desarrollo de su propio aprendizaje y en la construcción de modelos que matematizan la realidad a partir de un contexto cotidiano (Gravemeijer, 2004). En la EMR se identifican dos tipos de matematización: la matematización horizontal, donde los estudiantes transitan de lo real a lo simbólico para dar respuesta a problemas del propio contexto; y la matematización vertical, donde los estudiantes realizan conexiones conceptuales y crean estrategias para resolver problemas dentro del sistema matemático, que pueden o no referirse al contexto inicial. Es decir, se separan del contexto hacia el camino de la abstracción y la generalización (Van den Heuvel-Panhuizen y Drijvers, 2020).

En cuanto al razonamiento proporcional, partimos de la definición de Lesh et al. (1988):

> El razonamiento proporcional es la habilidad que permite trabajar con situaciones que impliquen variación, cambio, sentido de covariación y comparación múltiple, además de la capacidad de procesar y almacenar mentalmente varias piezas de información; también está ligado a la inferencia y a la predicción e involucra tanto métodos cualitativos como cuantitativos. (p. 93)

Acorde a este fundamento, asumimos como válido el modelo de razonamiento proporcional propuesto por Modestou y Gagatsis (2010) y reconocemos la necesidad de investigación a la que invocan los estudios sobre la ilusión de la linealidad de De Bock et al. (2002). En nuestro estudio identificamos a las habilidades proporcionales como aquellas facultades que son consideradas necesarias para que una persona posea un razonamiento proporcional sólido. Lobato et al. (2010) y Weiland et al. (2021) indican que esas habilidades deben incluir: 1) Atender y coordinar dos cantidades que varían de forma dependiente, 2) Reconocer y utilizar las estructuras de las situaciones proporcionales (razón unitaria, constante de proporcionalidad, linealidad), 3) Identificar el invariante en una proporción, 4) Comprender la proporcionalidad desde múltiples representaciones, 5) Distinguir las situaciones lineales de las no lineales. Consideramos a estas cinco habilidades como clave para nuestro estudio y son las que invocamos con el término habilidades proporcionales.

Para englobar el marco teórico y estructurar la intervención nos apoyamos del enfoque de Investigación Basada en Diseño (IBD) propuesto por Bakker (2018). Dado que en la IBD el diseño y la innovación en el aula son aspectos clave, se propone el uso de tecnología digital como medio que permita a los estudiantes interactuar con múltiples representaciones, facilitar la simulación de situaciones realistas y comprobar sus propios resultados en Entornos Didácticos Virtuales Interactivos (EDVI).

Para organizar el diseño de las tareas que guían a los estudiantes en el proceso de matematización, nos basamos en la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995). Para el diseño de las actividades que integra cada tarea nos apoyamos del marco didáctico Cuevas-Pluvinage, que aporta una ingeniería didáctica que rescata principios didácticos de la escuela activa y Piaget adaptados a la educación matemática (Cuevas y Pluvinage, 2003).

Coincidimos con Sierpinska (2004) en que “reportar las tareas es necesario para probar la eficacia del enfoque de enseñanza” (p. 13). Según la autora, la problematización, justificación y discusión de las tareas inicia con el análisis a priori del diseño, sin embargo, la problematización es aún más sustancial y fructífera en el análisis a posteriori; es decir, después de la experimentación en el aula. En este orden de ideas, en este informe mostramos la problematización tanto en la fase de diseño como en la fase de análisis retrospectivo, ya que da pautas para el rediseño de nuestras tareas.

Una de las labores más complejas para un docente es tratar de implementar principios de una didáctica de corte constructivista en un aula tradicional con los elementos usuales. Por ejemplo, introducir un concepto matemático mediante la problematización de una situación cotidiana, en un aula tradicional, resulta casi imposible. Una posible solución es contar con un escenario virtual que simule un fenómeno real, en el que los estudiantes puedan interactuar con diversos contextos de forma dinámica y, además, su uso permita la construcción de conocimiento matemático (Moyer et al., 2016). De este modo, se dota a los estudiantes de la oportunidad de acción, en donde cada estudiante puede aprender a su propio ritmo. La tecnología digital brinda al estudiante y al profesor de una especie de laboratorio portátil, al utilizar diversos dispositivos, como móviles, tabletas, etc.

Las consideraciones anteriores nos conducen a la pregunta de investigación: ¿Cómo diseñar una secuencia didáctica, en contextos realistas mediados por la tecnología, que ayude a los estudiantes a desarrollar su razonamiento proporcional y les permita progresar en los niveles de matematización de la EMR?

Metodología

Con base en nuestro marco metodológico, el enfoque de IBD utilizado consta de las siguientes fases: preparación y diseño, experimento de enseñanza y análisis retrospectivo.

Fase de preparación y diseño

En esta fase se diseñaron y desarrollaron: 1) Un pretest para recabar conocimientos previos de los estudiantes. 2) Una THA que guía el proceso de enseñanza y marca los objetivos de aprendizaje. 3) Tres secuencias de actividades didácticas con sus respectivos EDVI “Naranjada”, “Zoom Totoro” y “Autos”. 4) Una encuesta para indagar acerca de la perspectiva de los estudiantes en su experiencia con el uso de los EDVI y las actividades de las hojas de exploración y aprendizaje guiado (HEAG). El pretest y la encuesta final se alojaron en formularios de Google para responder en casa con el fin de ahorrar tiempo de aula.

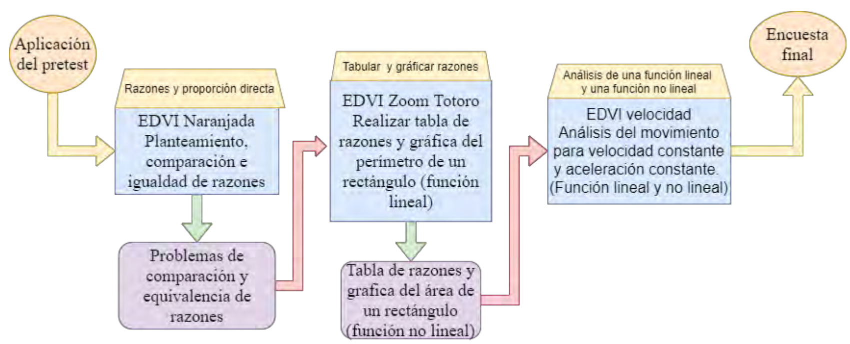

Figura 1: Diseño de la ruta didáctica que guía la secuencia de instrucción

Tarea 1. El contexto de la tarea consiste en comparar propuestas de mezcla de zumo de naranja y agua (ver figura 2a y 2b). El objetivo es que los estudiantes aprendan: a plantear, comparar y determinar equivalencia, entre razones; así como generar tablas de razones equivalentes e identificar la constante de proporcionalidad. Finalmente se realiza una actividad extra para aplicar el conocimiento aprendido en un contexto diferente. Las actividades que se realizan son: expresar una razón en notaciones diferentes, por ejemplo, 3 vasos de jugo por cada 5 de agua: 3 a 5, 3:5 y 3/5). 2) Coordinar la covariación entre dos variables, dada una razón de A vasos de naranja por cada B de agua, el sabor es más intenso a naranja si A aumenta o si B disminuye. 3) Comparación de dos razones. Dadas dos propuestas aleatorias de naranjada con razones de naranja en agua A:B y C:D, determinar cuál tendrá un mayor sabor a naranja.

Tarea 2. La tarea consiste en realizar un efecto “zoom” para reducir o aumentar una imagen de figuras Totoro acorde con una razón de semejanza que se introduce en una casilla de entrada (ver figura 2c). El objetivo es que los estudiantes realicen actividades de semejanza utilizando la constante de proporcionalidad. También, se pretende afrontar el problema de la ilusión de la linealidad al, tabular y graficar, las relaciones razón-perímetro (lineal) y razón-área (cuadrática), con el fin de conducir a los estudiantes hacia la comparación de ambos modelos.

Tarea 3. El contexto de la tarea consiste en visualizar un auto que se mueve a una velocidad constante superior al límite permitido y una patrulla que inicia una persecución con aceleración constante en el momento que el auto pasa a su lado (ver figura 2d). El objetivo es que los estudiantes interactúen con el EDVI mientras describen, analizan y comparan las características y las representaciones de los dos movimientos, es decir, el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). De este modo, los estudiantes deben identificar los modelos presentes (lineal y cuadrático) para comparar ambos comportamientos y transitar en sus representaciones.

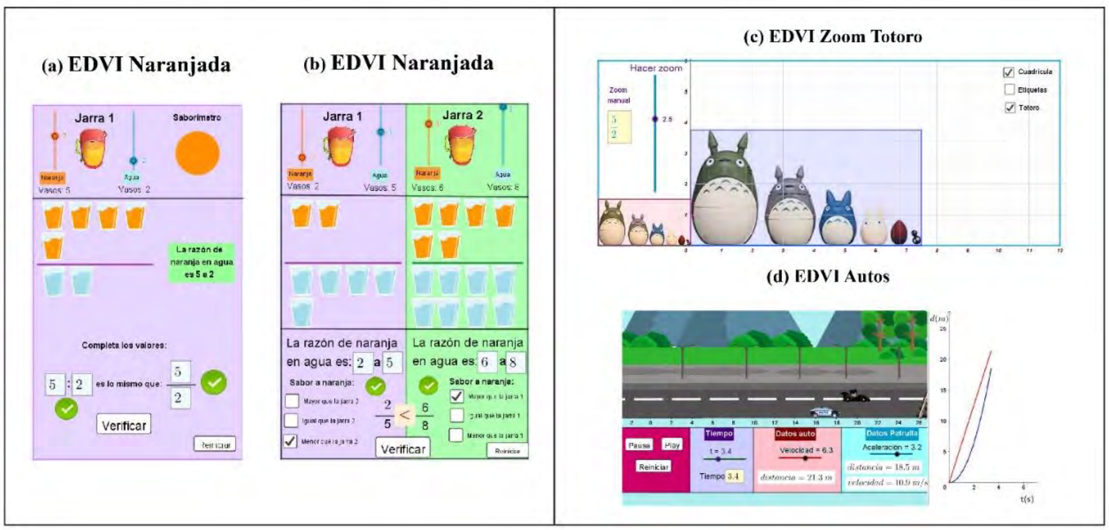

Figura 2. EDVI´s utilizados en la secuencia de enseñanza

Fase de experimento de enseñanza

El estudio se realizó mediante una intervención presencial en dos grupos de una Escuela Secundaria en México. Participaron en el estudio 35 estudiantes (14-15 años) en el invierno de 2021. La instrucción se dividió en tres sesiones de 90 minutos en un salón de cómputo de la escuela. Cada estudiante contaba con una computadora personal que tenía precargados los EDVI, también cada estudiante contaba con sus respectivas HEAG. La intervención estuvo a cargo del primer autor, apoyado por el profesor del grupo y un asistente de investigación. En las sesiones se promovió un aprendizaje colaborativo y se discutieron las respuestas en grupo.

Resultados y análisis retrospectivo

De acuerdo con Freudenthal (2002), el contexto y el diseño didáctico deben permitir a los estudiantes transitar de la matematización horizontal hacia la matematización vertical. Gravemeijer (2004) identifica cuatro niveles hacia la matematización vertical: N1) Nivel situacional. Se interpreta y organiza la realidad mediante razonamientos matemáticos informales y dependientes del contexto (matematización horizontal). N2) Nivel referencial. Se crean esquemas y modelos que tienen sentido dentro del contexto inicial, inicia la matematización vertical al surgir "modelos de...". N3) Nivel general. Se relacionan los conceptos, se generan estrategias que se separan del contexto, el razonamiento se da en el mundo matemático y surgen "modelos para...". N4) Nivel formal. Se comprenden los conceptos mediante su simbolismo matemático, ya no se necesita apoyo de algún contexto real, la reflexión ha transitado al mundo matemático y se puede prescindir de los modelos.

A reserva de presentar los resultados del grupo, seleccionamos aleatoriamente a una estudiante, que llamaremos Lucy, para presentar un análisis detallado de los resultados de las tareas y su evaluación mediante los niveles de matematización vertical propuestos en la EMR.

Resultados de la Tarea 1. "Naranjada"

Para realizar las actividades de la naranjada, Lucy utiliza sus conocimientos previos, es decir, las actividades la conducen a una matematización horizontal, asimilando correctamente las tres notaciones para razón. Además, encontró que a una propuesta aleatoria de naranjada la intensidad de sabor depende de un proceso de covariación. En esta fase Lucy se encuentra en el nivel situacional, porque se mueve dentro del mundo numérico solo para interpretar el contexto y emitir un juicio, la matematización horizontal es un ir y venir del contexto al mundo matemático.

Un hallazgo se dio cuando el EDVI mostró a Lucy el siguiente par de razones de naranja a agua: 2:7 y 3:8 (ver figura 4a), Lucy Realizó mentalmente una biyección 1 a 1 entre los vasos de naranja y los vasos de agua. Una vez hecha la biyección, cuando en ambos escenarios quedó el mismo número de vasos de agua sin asociar, Lucy respondió, intuitivamente, que las dos tienen el mismo sabor, es decir, la misma proporción. Esta forma errónea de comparar razones, análoga al erróneo principio aditivo, la extendió a todas las situaciones, y le funcionó cuando los vasos restantes de agua fueron distintos. No obstante, cuando los vasos restantes de agua fueron iguales el EDVI señaló un error, incomprensible para Lucy. Al cierre de la sesión, mediante discusión grupal, se precisaron métodos para comparar razones y se comprobó que la mayoría de los estudiantes adoptaba el razonamiento descrito, e incluso algunos estudiantes se mostraron sorprendidos de que el método fallara. Como esta misma situación se presentó en la mayoría de los estudiantes la llamaremos "ilusión de la proporcionalidad".

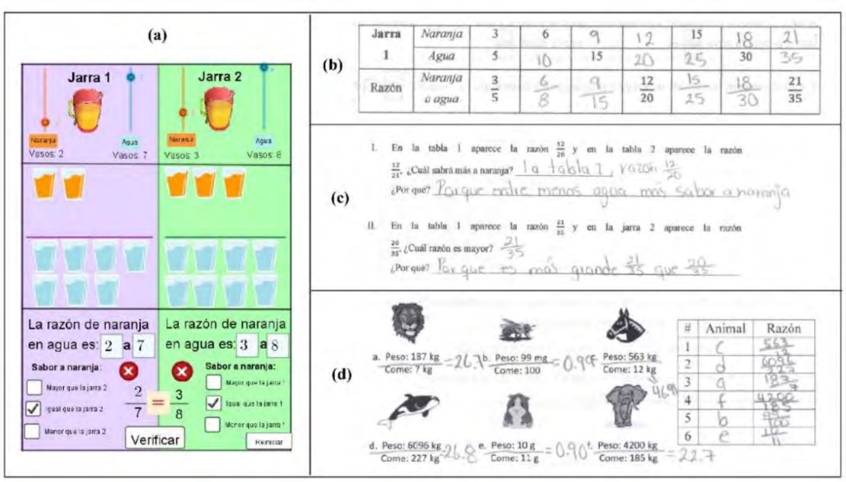

Figura 3. Evidencia de las actividades correspondientes a la Tarea 1

La actividad de completar tablas de razones equivalentes está sujeto al contexto (mezclas naranja-agua en la misma proporción), pero el patrón multiplicativo que Lucy usa para llenar la tabla se da en el ámbito matemático, también se observa que al inicio persiste el razonamiento aditivo (Ver figura 3b). Una manera de comparar las razones equivalentes de las tablas es considerar pares de razones que tengan numeradores o denominadores iguales, Lucy se vale de ese hecho (ver figura 3c) para hacer juicios numéricos y da un argumento de covariación basado en el denominador de las razones, por lo que es claro un nivel referencial.

En los ejercicios de aplicación, posteriores a la actividad con el EDVI, Lucy utiliza eficientemente el método de la razón unitaria. En la figura 3d se muestra un ejercicio de ordenamiento de razones (adaptado de Lamon, 2020), que consiste en ordenar a un conjunto de animales en relación con su peso. Lucy aplica el método de la razón unitaria para resolver problemas en contextos diferentes, se infiere que ha adquirido un "modelo para" y se vislumbra un progreso del nivel referencial al nivel general.

En esta tarea, Lucy muestra habilidades para plantear razones en distintas notaciones, comparar razones, aplicar el principio multiplicativo para obtener razones equivalentes y utilizar el método de la razón unitaria para resolver problemas prácticos. En este nivel, los estudiantes ya poseen habilidades de razonamiento proporcional. Sin embargo, los datos muestran que Lucy tenía, en su estructura de conocimientos un arraigo en el razonamiento aditivo; el cual se logró modificar, e incluso se consolidó el método de la razón unitaria.

Resultados de la tarea 2. "Zoom Totoro"

En la etapa inicial se involucran procesos de observación, medida y principio multiplicativo. La actividad de calcular las dimensiones de la imagen para distintas razones está anclado al contexto (nivel situacional), sin embargo, al seguir el patrón se marca el camino al nivel referencial, ya que Lucy nota que para obtener las medidas de la imagen replicada se multiplican las medidas de la imagen original por la razón de semejanza (ver tabla en la figura 4a).

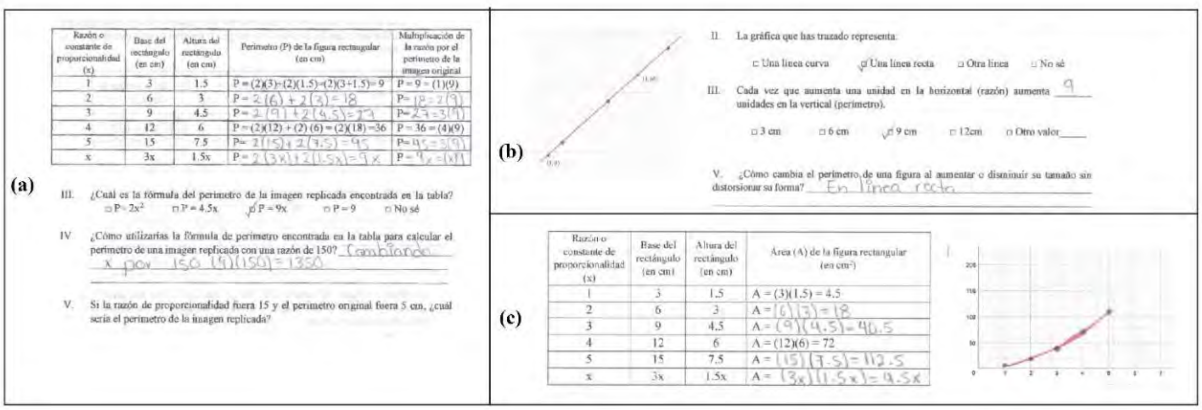

Figura 4. Evidencia de las actividades correspondientes a la Tarea 2

En la tabla para calcular el perímetro de imágenes aumentadas según una razón de semejanza, Lucy se basa en la tabla de dimensiones y se aleja del contexto debido a que el concepto inicial se relaciona, en primera instancia con el perímetro, y en segunda con el área. Lucy calcula los perímetros para las razones propuestas siguiendo el ejemplo inicial de la tabla hasta llegar a la expresión lineal P=9x y aplica el "modelo de" encontrado (ver figura 4a). Para graficar la relación razón-perímetro, Lucy transita entre las representaciones tabular-gráfica y logra ver la variación lineal (ver figura 4b). En cuanto a la relación razón-área, completa la tabla y realiza la gráfica, describiendo que es curva (ver figura 4c). Sin embargo, no concluye en el "modelo de" buscado (relación cuadrática) y no se llega a contrastar entre perímetro y área.

Al realizar esta tarea, Lucy mostró la habilidad para transitar entre las representaciones tabular, gráfica y algebraica de la proporcionalidad; identificando el valor de la constante de proporcionalidad en el caso del perímetro, y además obteniendo un modelo que describe el caso particular. Sin embargo, no se logra avanzar hacia el nivel general.

Resultados de la tarea 3. "Autos"

De inicio, las actividades en este EDVI, son de instrumentación y contextualización. Lucy identifica las características de los movimientos, tanto a velocidad constante como a aceleración constante. Sus ideas previas e informales sobre tales conceptos se modificaron después de interactuar con el EDVI y observar el cambio en las variables, su relación y al realizar observaciones numéricas.

Como se puede observar en la figura 5c, Lucy transita correctamente entre las representaciones tabulares y gráficas, y también identifica características lineales y no lineales, tanto en la gráfica como en las tablas. En esta tarea Lucy ve relaciones entre las variables que van más allá del contexto inicial, al identificar un "modelo de", utilizarlo y concluir que la variación es proporcional (en el auto) y cuadrático (en la patrulla); también, distingue los comportamientos lineales y no lineales en las representaciones. Sin embargo, Lucy no logró proponer un modelo para la aceleración constante.

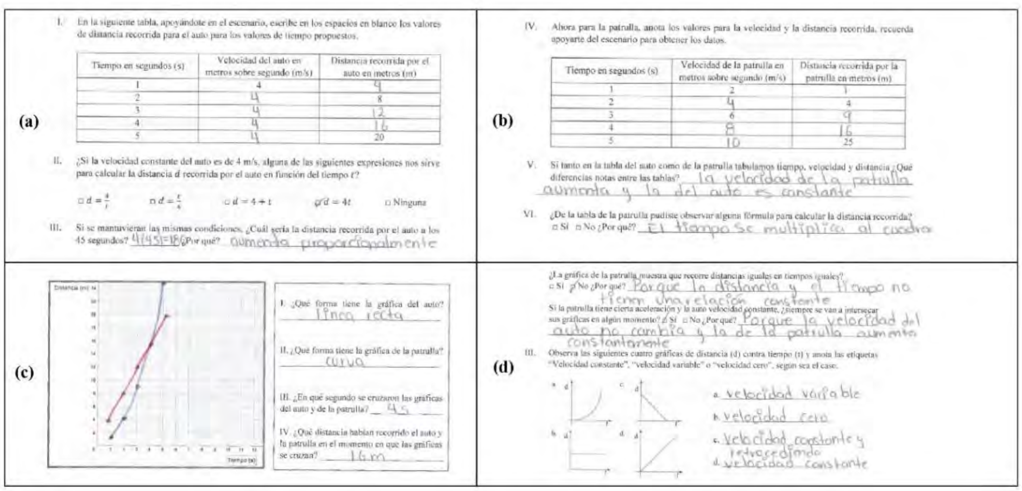

Figura 5. Evidencia de las actividades correspondientes a la Tarea 3

Al visualizar y comparar las gráficas de los movimientos para diversos parámetros de velocidad y aceleración, Lucy interpreta el crecimiento y la variación, al argumentar: "si se recorren distancias iguales en tiempos iguales, distancia y tiempo tienen una relación constante", y que el crecimiento de la aceleración siempre superará al de la velocidad porque "la velocidad del auto no cambia y la de la patrulla aumenta constantemente" (ver figura 5d). En los razonamientos de Lucy se observa un enriquecimiento conceptual que trasciende al contexto y, aunque no son manipulaciones numéricas o algebraicas, son de carácter general. Es decir, son razonamientos generales que aplican para cualquier contexto de MRU y MRUA. En palabras de Freudental (2002), "La relación entre la razón constante y la linealidad es una hazaña de matematización vertical" (p.43).

Al realizar esta tarea, Lucy muestra la habilidad de distinguir una situación lineal de una situación no lineal, e identificando los rasgos distintivos de cada una en distintas representaciones. Con lo cual, muestra claros progresos en su razonamiento proporcional.

Discusión y conclusión

En la Tarea 1 Lucy tuvo dificultades para comparar dos razones cuya diferencia entre numerador y denominador era la misma, 2/7 y 3/8, esa idea cambió con la tarea, inferimos que hay dificultades en la comprensión de los estudiantes que emergen con esta actividad, de acuerdo con Sierpinska (2004), "las tareas deben ser capaces de revelar las concepciones erróneas más ocultas de los estudiantes" (p. 14). En la Tarea 2 el objetivo es confrontar la ilusión de la linealidad, respecto a la confusión que presentan los estudiantes al suponer que el área y el volumen guardan una relación lineal con la razón de semejanza. Sin embargo, las actividades no dan muestra de ser suficientes por lo que deben rediseñarse. Es necesario añadir figuras geométricas, para que los estudiantes distingan la relación lineal del perímetro con la cuadrática del área y la cúbica del volumen, de una manera geométrica más activa. En la Tarea 3, el análisis detallado sobre las respuestas de Lucy nos marca la pauta para profundizar en las actividades que hagan surgir los "modelos para" y se logre la generalización.

El análisis detallado de las respuestas de Lucy en cada tarea da muestras del aprendizaje que adquiere para trabajar con razones, transitar en representaciones proporcionales y contrastarlas con fenómenos no lineales en diferentes contextos. Lo anterior nos da elementos para responder nuestra pregunta de investigación y nos da pautas suficientes para el rediseño de las actividades que organiza la THA en cada una de las tareas propuestas. También, nos aporta evidencia suficiente para discernir en cuál de las tareas, y de qué forma, se debe profundizar para lograr que los estudiantes muestren mejores progresos en los niveles de matematización vertical. Es decir, la diversidad de contextos favorece la matematización horizontal (nivel situacional), en consecuencia, considerando los tiempos en el currículo, los diseñadores de secuencias didácticas debemos discernir qué es lo más conveniente en cada situación, ya que al reducir el número de contextos podría aumentar la oportunidad de lograr mayor profundidad en el proceso de matematización. En este sentido, consideramos que también son necesarias actividades totalmente matematizadas sin referencia a ningún contexto que den cuenta del nivel formal.

En esta investigación en desarrollo, tratamos de encontrar vías de enseñanza para abordar los conceptos involucrados en el razonamiento proporcional. Primero con acercamientos hacia la razón y la proporción con las funciones lineales y sus representaciones (simbólica, tabular y gráfica). En este sentido, un primer eje de la propuesta es priorizar el concepto de razón como precursor para acceder a la equivalencia, la comparación y las tablas de razones, lo cual conduce inexorablemente hacia las funciones lineales; un segundo eje es que el estudiante se enfrente a diversos contextos para explorar situaciones proporcionales en sus distintas representaciones y el tercer eje consiste en considerar el fenómeno de la ilusión de la linealidad. Se intenta que los estudiantes experimenten situaciones realistas tanto lineales como no lineales y cuestionen la linealidad (o la ausencia de ella) cada vez que se enfrenten a un problema, reaccionando de manera razonada de acuerdo con las características de la situación.

En cuanto a la influencia de la tecnología en el estudio, es claro que su uso permite simular y replicar situaciones cotidianas susceptibles de problematizarse, además de brindar ventajas pragmáticas y epistémicas. Por ejemplo, el uso de EDVI posibilita: presentar al estudiante datos aleatorios, interactuar con los contextos de forma dinámica, mostrar los objetos matemáticos en distintas representaciones y validar los resultados. Como se ha descrito en el análisis, la experiencia de los estudiantes con los EDVI permitió observar concepciones erróneas que, probablemente en formas de enseñanza tradicionales, pasarían inadvertidas. Por otro lado, interactuar con los EDVI provocó en los estudiantes un interés que iba más allá del contexto matemático planteado, involucrándose con problemas que se derivaban de las tareas.

Referencias

Adjiage, R. & Pluvinage, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(2), 149–175. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9049-x

Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (1st ed.). Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203701010

Cuevas, C. A. & Pluvinage, F. (2003). Les projets d'action practique, elements d'une ingeniere d'ensigment des mathematiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *8*, 273-292.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 311-334. https://doi.org/10.1023/a:1021205413749

Freudenthal, H., (2002) Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer, Dordrecht

Gravemeijer, K. (2004). Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105–128. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_3

Lamon, S. J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Towards a Theoretical Framework for Research. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-667). Information Age Publishing.

Lamon, S. J. (2020). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content 83 and Instructional Strategies for Teachers*. Routledge, 2020.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93–118). National Council of Teachers of Mathematics.

Lobato, J. E., Ellis, A. B. & Charles, R. I. (2010). *Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions, and Proportional Reasoning for Teaching Mathematics in Grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(1), 36-53. https://doi.org/10.1080/10986060903465822

Moyer-Packenham, P. S., Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. En Moyer-Packenham, P. (Eds.) *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 7. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1

Sierpinska, A. (2004). Research in Mathematics Education through a Keyhole: Task Problematization. *For the Learning of Mathematics*, *24*(2), 7–15. http://www.jstor.org/stable/40248450

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145. https://doi.org/10.2307/749205

Van den Heuvel-Panhuizen M (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1):9–35

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic Mathematics Education. In *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 713–717). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_170

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. & Burke, J. (2021) Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. J Math Teacher Educ, 24, 179–202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0