RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS VERBALES CON GEOGEBRA: UNA FUENTE DE POSIBILIDADES EN EL ESTUDIO DE RELACIONES

WORD PROBLEM SOLVING WITH GEOGEBRA: A SOURCE OF POSSIBILITIES IN THE STUDY OF RELATIONSHIPS

Adrián Gómez-Arciga
Cinvestav-IPN
agomeza@cinvestav.mx

El propósito de este estudio fue analizar cómo influye en las formas de razonamiento de estudiantes de bachillerato el uso sistemático de GeoGebra cuando lo incorporan en la resolución de problemas verbales. El estudio se realizó con un grupo de 20 estudiantes que cursaba la materia de Matemáticas I. Los resultados muestran que los estudiantes se apropiaron de recursos del sistema de geometría dinámica (GeoGebra) que, al utilizarlos de forma sistemática, les permitió implementar estrategias para representar geométricamente los conceptos involucrados en los problemas, explorar y analizar relaciones entre los elementos de los modelos dinámicos construidos y hallar las soluciones. Así, gracias a la exploración y análisis de relaciones, fue posible discutir con los estudiantes conceptos como: razón, dominio, lugar geométrico, variación.

Palabras clave: Resolución de Problemas, Problemas Verbales, Tecnología Digital, Álgebra

Introducción

El Covid-19 ha provocado un cambio sustantivo en el uso de tecnologías para el ámbito educativo. Se ha producido una rápida difusión de estas para mitigar las problematicas provocadas por el confinamiento. En particular, en lo que a Educación Matemática se refiere, el uso de tecnologías digitales está en un estatus marginal, pues su implementanción siempre va por detrás de la velocidad de la evolución digital, incluso antes de las modificaciones forzadas por la pandemia Covid-19, y a pesar de que es una necesidad en el siglo XXI para la enseñanza de las matemáticas (Cevikbas & Kaiser, 2020). Por ello, es importante que los profesores conozcan y utilicen estratégicamente diversas tecnologías, para que todos los estudiantes tengan las mismas oportunidades y posibilidades de acceder a las matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, 2011).

Implementar tecnología digital en las clases de matemáticas puede ayudar a aminorar los aspectos técnicos del álgebra que surgen cuando se resuelven problemas (Arcavi et al., 2017). Esto permite a los estudiantes enfocarse en desarrollar recursos y estrategias que sean útiles para describir relaciones y resolver problemas que involucren la construcción y uso de relaciones funcionales, que son objetivos principales en el estudio del álgebra porque favorecen la comprensión conceptual de los procesos algebraicos (Kieran, 2020). En este sentido, es válido reflexionar si debieran modificarse tanto el contendido como la forma en que se imparte álgebra; es decir, cuestionarse si hoy en día son adecuados los temas que se enseñan en álgebra y la manera en que se enseñan (Thomas, 2017).

Un hilo conductor en el estudio del álgebra es la resolución de problemas verbales, que van desde la educación básica hasta la superior (Amado et al., 2019). A través de estos, se espera que los estudiantes experimenten, articulen y debatan diferentes acercamientos a la solución que promuevan el análisis y comprensión de los conceptos e ideas principales del álgebra. De hecho, una propuesta bien recibida entre los investigadores y profesores para enfrentarse a estos problemas ha sido desarrollar los episodios y etapas del marco de resolución de problemas (Blum y Niss, 1991; Verschaffel et al., 2000), porque favorece el uso de estrategias y el trabajo colaborativo en los estudiantes.

No obstante, se han realizado investigaciones sobre propuestas de enseñanza que incluyen el uso de tecnología en la resolución de problemas verbales para conocer el impacto que tienen en los estudiantes. Por ejemplo, Amado et al. (2019) presentaron resultados de un estudio donde, además de trabajar bajo el marco de la resolución de problemas, utilizaron hojas de cálculo con el objetivo de observar cómo sus herramientas pueden ayudar a estudiantes de secundaria (entre 13 y 14 años) a representar y resolver problemas verbales y a introducirlos a métodos algebraicos formales. Ellos encontraron que, aunque los estudiantes todavía no aprendían a usar representaciones algebraicas (sistemas de ecuaciones de dos o más incógnitas) para resolver los problemas verbales, la hoja de cálculo no solo les ayudó a resolverlos, sino también a que interpretaran la solución como un valor que satisface un conjunto de condiciones que están asociadas a las ecuaciones.

En este contexto, el uso de un sistema de geometría dinámica (SGD) puede ser clave para el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional en la resolución de problemas verbales, porque permite representarlos, explorarlos y resolverlos desde un enfoque geométrico. Bozkurt y Uygan (2020) explican que los SGD permiten a los estudiantes manipular objetos geométricos y explorar relaciones entre ellos. Además, identifican el arrastre como una estrategia eficaz de estos sistemas, que es el resultado de mover elementos de las configuraciones dinámicas sin cambiar sus relaciones geométricas subyacentes. Finalmente, reconocen su potencial didáctico, y la importancia de no usarlos de forma convencional, como sistemas de softwares estáticos.

Aunque se han hecho estudios que involucran el uso de la tecnología digital en la resolución de problemas verbales, todavía falta más evidencia que refleje una forma eficiente y adecuada de su implementación (Verschaffel et al., 2020). Entonces, con el objetivo de aportar más evidencias a esta discusión, se planteó la siguiente pregunta que guio la investigación: ¿Qué tipo de razonamientos construyen y exhiben estudiantes del nivel medio superior cuando resuelven problemas verbales con el uso de un sistema de geometría dinámica (GeoGebra) bajo el enfoque de resolución de problemas?

Marco Conceptual

Arcavi et al. (2017) identifican cinco puntos que son claves en la enseñanza del Álgebra. El primero está relacionado con enseñar álgebra a través de situaciones o problemas contextualizados, que tomen en cuenta las experiencias y conocimientos preliminares de los estudiantes. El segundo es fomentar prácticas que sean productivas: orientadas hacia actividades o tareas que requieran habilidades del pensamiento de mayor orden, como la búsqueda de diferentes formas de resolverlas, evaluación de la efectividad de los procedimientos, participación en las discusiones de clase, y reflexionar sobre los métodos o acercamientos mostrados. El tercero es reconciliar a los procedimientos de rutina con el entendimiento, porque, a pesar de que hay una amplia discusión de si se oponen o complementan, se necesitan ambos para potenciar el pensamiento algebraico. El cuarto es ver los errores de los estudiantes como una oportunidad para comprender de dónde o por qué surgen y, así, prevenir que sigan ocurriendo. Y el quinto punto es buscar formas de hacer accesible e involucrar a los estudiantes en pruebas o argumentos matemáticos, aun si estas se perciben abstractas y formales para ellos.

Por otra parte, Kieran (2020) identifica tres tipos de actividades en el estudio del álgebra que son esenciales para el desarrollo del pensamiento algebraico: (a) interpretación y representación algebraica de situaciones, propiedades, patrones y relaciones; (b) manipulación simbólica que permita el desarrollo de habilidades y aspectos conceptuales e; (c) implementación del álgebra como una herramienta para modelar situaciones, justificar y probar, hacer predicciones y conjeturas, buscar relaciones y resolver problemas. De cierta manera, estas acciones están comprendidas en los puntos que se mencionaron anteriormente.

Ahora, respecto al uso de tecnología digital, Santos-Trigo (2019) ha identificado que, cuando se involucra el uso de un SGD en la resolución de problemas, hay cuatro tipos de tareas que se pueden llevar a cabo, las cuales se caracterizan por las representaciones, estrategias y formas de razonamiento que surgen en los procesos de solución: (a) enfocarse en las figuras. Son tareas que utilizan un SGD para reconstruir las figuras que están descritas en los enunciados de los problemas o que aparecen como una imagen que acompaña al enunciado. Su valor está en la necesidad de identificar los elementos que componen a las figuras y explorar las formas en las que se relacionan; (b) tareas de investigación. Transforman problemas rutinarios, como los que se encuentran en los libros de texto, en una serie de actividades de investigación y reflexión matemática; (c) tareas de variación. En estas, interesa representar y analizar problemas que involucren fenómenos de variación mediante un modelo gráfico sin tener que recurrir a un modelo algebraico; (d) configuraciones dinámicas. El objetivo es formular problemas a partir de configuraciones dinámicas y buscar argumentos que validen las relaciones matemáticas encontradas.

Estas tareas no solo aportan información a la resolución de los problemas, sino también ayudan a comprender cómo se relacionan los datos y conceptos involucrados. Además, pueden realizarse de manera simultanea cuando se resuelve un problema. Por ejemplo, en los problemas verbales los estudiantes podrían concentrarse en *tareas de variación*, ya que la mayoría describen situaciones que involucran fenómenos de variación, sin embargo, también podrían dirigir su atención a tareas de *construcción de figuras* cuando el contexto de los problemas sea además geométrico.

Considerando este contexto, es importante un marco que permita planear, organizar y analizar las formas en que los estudiantes resuelven los problemas con el uso de tecnología digital. En este sentido, Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013), basados en el marco de resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (1985) y en el método de Polya (1945) para resolver problemas, articulan un marco que engloba la resolución de problemas y el uso de tecnología digital. Este consta de cuatro fases que se caracterizan por el tipo de preguntas que se plantean en cada una: (1) comprensión del problema. ¿Cómo representar la situación descrita en el problema en términos de las herramientas digitales disponibles?; (2) exploración. ¿Qué estrategias pueden implementarse con las herramientas digitales disponibles que permitan explorar las formas en que se relacionan los datos explícitos e implícitos del problema?; (3) búsqueda de distintos acercamientos a la solución. A partir de las exploraciones realizadas en la segunda fase, ¿cómo pueden aprovecharse para obtener la solución?; (4) integración y reflexiones. ¿Cuáles fueron las ideas principales durante el proceso? Y ¿qué aportó el uso de la tecnología digital a la resolución del problema?

Con base en estas ideas pueden evaluarse y caracterizarse las formas de razonamiento que exhiben los estudiantes durante la resolución de los problemas verbales con el uso de un sistema de geometría dinámica.

Metodología

Esta investigación es cualitativa, mediante la observación e interacción controlada se caracterizaron las formas de razonamiento que exhibieron los estudianes en el desarrollo de las tareas. Se seleccionó un grupo de Matemáticas I de nivel medio superior, el cual estaba conformado por 20 estudiantes (entre 15 y 17 años), y se trabajó con este por 24 sesiones, donde cada sesión tenía una duración de dos horas.

Para el desarrollo de las sesiones se dispuso de 11 iPads con la aplicación de GeoGebra instalada (10 para los estudiantes y una para el investigador) y un proyector. Debido al número limitado de iPads, se formaron equipos de dos estudiantes y se asignó un iPad a cada uno. La dinámica que se siguió durante la implementación de los problemas, después de haber utilizado las primeras cuatro sesiones para introducirlos al SGD, fue utilizar una o dos sesiones para que los equipos los representaran, exploraran, resolvieran y, después, discutieran sus resultados con todo el grupo mediante el proyector.

Para que los estudiantes pudieran resolver los problemas con el uso del SGD, se propuso el siguiente esquema (Figura 1):

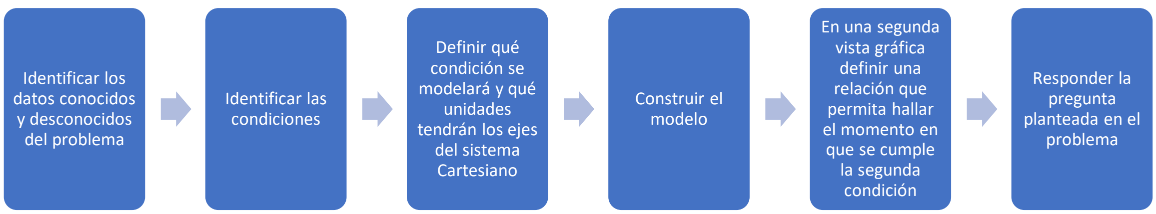

Figura 1: Esquema para resolver problemas verbales con el uso de GeoGebra.

Y para que pudieran representar algebraicamente la solución geométrica hallada con el SGD, se propuso el siguiente esquema (Figura 2):

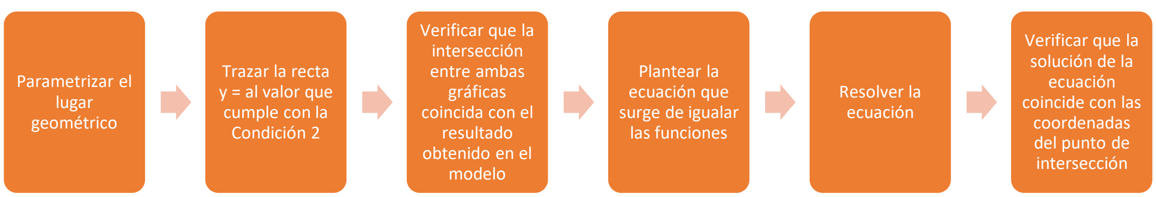

Figura 2: Esquema para algebrizar la representanción geométrica.

Los esquemas se constuyeron con base en los elementos del marco conceptual, y surgieron en respuesta a resultados obtenidos en investigaciones previas (Gómez-Arciga et al., 2018; Gómez-Arciga & Reyes-Martínez, 2019).

Para la selección de los problemas se hizo una lista donde se categoraizaron por su contexto, se trabajaron en las sesiones de un seminario de resolución de problemas, y se identificaron los más apropiados para alcanzar los objetivos del estudio. En los resultados se reportan los desarrollos que mostraron diferentes equipos en la resolución de dos problemas verbales.

Los datos se recolectaron a través de archivos de GeoGebra, videograbaciones y notas de campo. Estas últimas se utilizaron para destacar algunas ideas que, en un primer momento, se consideraron importantes en el desarrollo de las sesiones. Así, al momento de revisar las videograbaciones, se analizaron secciones específicas que ya se habían detectado en clase.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Resultados

En cada problema de esta sección se muestran dos acercamientos a la solución. Estos fueron desarrollados por diferentes equipos.

Problema 1: El perímetro de un triángulo isósceles es de 48 cm. Si el lado diferente equivale a 2/3 de la medida de los lados iguales, ¿cuál es la medida de los lados del triángulo?

La idea inicial del primer acercamiento fue construir una familia de triángulos isósceles con perímetro de 48 cm. Para lograrlo, trazaron lo siguiente (Figura 3): un segmento AB en el eje horizontal, con A en el origen y B un punto móvil; una circunferencia centrada en A y con radio AB; una circunferencia centrada en B con radio $r = 48 - 2f$, donde f era la longitud del segmento AB; y el triángulo ABD, donde D era una de las intersecciones entre las circunferencias. Así, el triángulo ABD cumplía la condición de ser isósceles con $AB = AD$ y tener perímetro de 48 cm.

Cuando el equipo utilizó la prueba del arrastre para mostrar que su modelo era robusto, observó que el triángulo solo existía si B se movía en el intervalo abierto (12, 24), lo cual derivó en una discusión con todo el grupo sobre el dominio del problema y la relación que guardaban los lados del triángulo para que pudiera construirse.

Luego, definieron el punto $\mathrm{E} = \left(a, \frac{2}{3}b - a\right)$ que relacionaba al lado desigual con la diferencia de las dos terceras partes de uno de los lados iguales y el desigual (a era la longitud del segmento BD, y b, la longitud del segmento AD), con el objetivo de encontrar las dimensiones del triángulo que cumpliera con la condición restante del problema. La solución la hallarían cuando al mover B la ordenada de E fuera cero, que gráficamente significó hallar la intersección del lugar geométrico descrito por E y el eje horizontal (Figura 4).

Finalmente, el equipo intentó, pero sin éxito, parametrizar el lugar geométrico para obtener la solución algebraica.

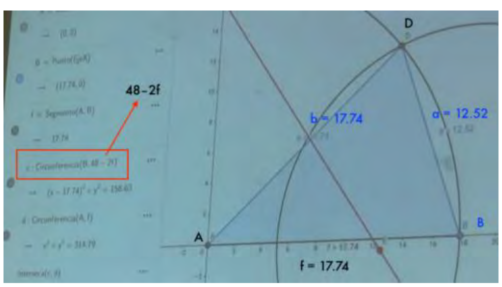

Figura 3: Construcción de la familia de triángulos isósceles con perímetro de 48 *cm*.

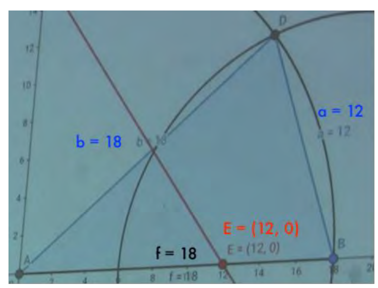

Figura 4: Dimensiones del triángulo que cumple con las condiciones del problema.

El segundo acercamiento, mostrado por otro equipo, consistió en modelar la relación entre uno de los lados iguales y el diferente (no construye el triángulo). Para ello, trazó un segmento AB, con A en el origen y B un punto móvil sobre el eje horizontal, y un segmento AC, donde C fue el punto de intersección entre el eje vertical y la circunferencia con centro en A y radio $r = \frac{2}{3}f$ (f era la longitud del segmento AB) (Figura 5). Con estos trazos, el equipo aseguró que la longitud del segmento AC fuera *2/3* de la longitud del segmento AB para cualquier posición del punto B. Entonces, la longitud del segmento AC se asoció a la medida del lado diferente del triángulo, y la longitud del segmento AB, a la medida de uno de los lados iguales.

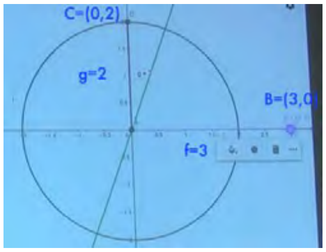

Figura 5: Modelo del segundo acercamiento.

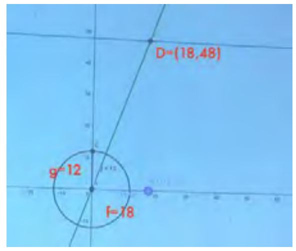

Figura 6: Solución gráfica.

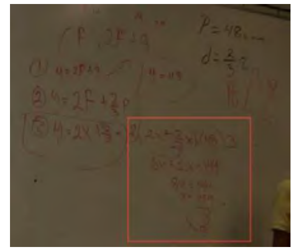

Figura 7: Solución algebraica.

A partir del modelo, definió el punto $D = (f, 2f + g)$ que relacionaba la medida de uno de los lados iguales del triángulo con su perímetro. La solución la obtuvo cuando la ordenada del punto *D* fue 48, porque cumplió con las condiciones descritas en el enunciado. En la Figura 6 se observa que cuando la medida de los lados iguales es 18 *cm* y la del diferente es 12 *cm*, el perímetro es de 48 *cm*, y que la solución gráfica se halla en la intersección del lugar geométrico descrito por *D* y la recta $y = 48$.

La parametrización y solución algebraica fue desarrollada adecuadamente por el equipo. En la Figura 7 puede observarse que planteó la ecuación $2x + \frac{2}{3}x = 48$, que fue resultado de igualar la función que surge de parametrizar el lugar geométrico y la función constante ($y = 48$), y la resolvió correctamente.

Problema 2: En cierta competencia de atletismo el corredor *A* se encuentra a 30 metros adelante del corredor *B*. El corredor *A* lleva una velocidad constante de 7 *km/h* y el corredor *B* lleva una velocidad constante de 8 *km/h*. Si los dos salen al mismo tiempo, ¿después de cuántos metros el corredor *B* alcanzará al corredor *A*?

El primer equipo que mostró su acercamiento seleccionó las unidades del eje horizontal como segundos (tiempo), y las del eje vertical, como *m/s* (velocidad). Eligió las unidades de los ejes de esta forma porque el problema pedía hallar una distancia en metros. En consecuencia, el equipo hizo las conversiones de las unidades de las velocidades de los corredores: la velocidad del corredor *A* fue de $1.9\overline{4}$ *m/s*, y la de *B*, de $2.\overline{2}$ *m/s*.

De este modo, como la distancia es el resultado del producto del tiempo y la velocidad, el equipo representó las distancias recorridas por los corredores mediante áreas de rectángulos: en la Figura 8 la longitud del segmento *AB* ($f = 2$) representó el tiempo, en segundos, transcurrido de cada corredor; las longitudes de los segmentos *AD* y *AC*, las velocidades de los corredores *A* y *B*, respectivamente; y las áreas de los rectángulos *ABED* ($c2 = 3.88$) y *ABFC* ($c1 = 4.4$), los metros recorridos por los corredores *A* y *B*, respectivamente. Así, la Figura 8 muestra el valor numérico de la distancia recorrida de cada corredor en dos segundos.

El equipo analizó, mediante el lugar geométrico que describía el punto $G = \left(c1, \frac{c2+30}{c1}\right)$, para qué distancia c1 se cumplía que $\frac{c2+30}{c1} = 1$ (Figura 9); dicho de otra forma, analizó, a través de una razón, qué distancia recorrió el corredor *B* para alcanzar al corredor *A* (quien, en el mismo tiempo que *B*, ha recorrido $c2 + 30$ metros).

En la Figura 9 se observa que, a los 253 metros, aproximadamente, el corredor *B* alcanzó al corredor *A*, ya que es la intersección entre el lugar geométrico y la recta $y = 1$. A partir de este resultado se preguntó al equipo sobre el significado de la razón cuando era menor o mayor a 1: el equipo identificó que cuando la razón era menor a 1, significaba que el corredor *B* había rebasado al corredor *A*; en caso contrario, *A* mantenía el primer lugar.

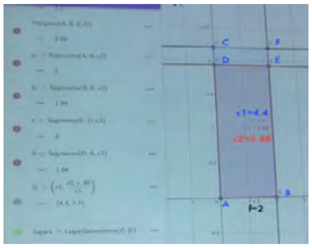

Figura 8: Modelo del primer acercamiento del problema 2.

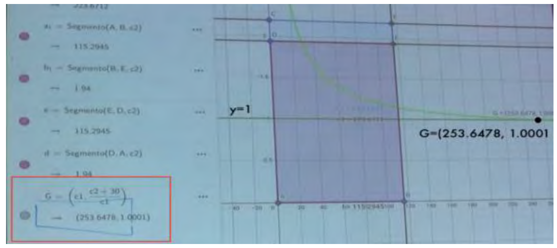

Figura 9: Exploración de la relación que hay entre las distancias recorridas por los corredores.

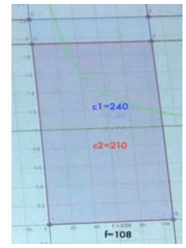

Figura 10: Solución gráfica robusta.

Al momento de parametrizar y resolver algebraicamente el problema, hallaron que la solución era 240 metros, lo que evidenció el margen de error provocado por no robustecer el lugar geométrico cuando lo intersectaron con la recta $y = 1$. Una vez corregida esa imprecisión en el modelo, observaron también que transcurrieron 108 segundos para que el corredor *B* alcanzara al corredor *A* (Figura 10).

Otro equipo, en su acercamiento, representó a las velocidades de los corredores como pendientes de rectas (Figura 11). Para ello, asignó al eje horizontal unidades de hora, y al eje vertical, unidades de kilómetro. Entonces, para construir las rectas con pendientes de 7 y 8 unidades (*km/h*), definió los puntos *B* y *C* sobre el eje vertical en 7 y 8, el punto *D* sobre el eje horizontal en 1, trazó perpendiculares a los ejes pasando por estos puntos, y con las intersecciones entre estas (puntos *E* y *F*), trazó la recta *AF* con pendiente 7 y la recta *AE* con pendiente 8.

Para representar el resto de los datos, el equipo ubicó un punto móvil sobre el eje horizontal (punto *G*), trazó una perpendicular al mismo eje pasando por este punto, marcó las intersecciones de esta con las rectas (puntos *H* e *I*) y, mediante perpendiculares al eje vertical que pasaban por los puntos *H* e *I*, marcaron las intersecciones de estas con el eje vertical (puntos *J* y *K*) (Figura 12). Así, el segmento *AG* representó el tiempo transcurrido (en horas) de la competencia, y el segmento *JK* o segmento a la distancia (en kilómetros) entre los corredores en el tiempo *AG* (pues *AK* era la distancia recorrida por el primer corredor, y *AJ*, la distancia recorrida por el segundo).

De esta forma, el equipo definió el punto $L = (AG,\ a)$ que relacionaba el tiempo transcurrido en la competencia con la distancia entre los corredores (Figura 12); y cuando su ordenada fue 0.03 (30 metros), obtuvo la distancia que recorrió el corredor *B* para alcanzar al corredor *A* en la longitud del segmento *AJ* (o en la ordenada del punto *J = (0, 0.24)*). Aunque el equipo identificó que la solución geométrica estaba en la intersección del lugar geométrico de *L* y la recta $y = 0.03$, no desarrolló el acercamiento algebraico.

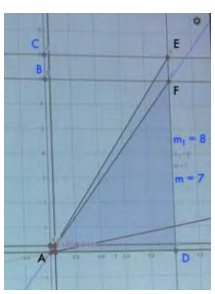

Figura 11: Velocidades representadas como pendientes.

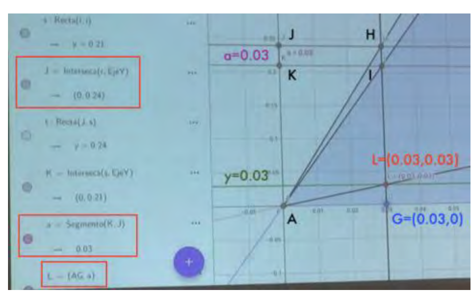

Figura 12: Solución geométrica basada en el modelo de pendientes.

Discusión de los resultados y conclusiones

En los procesos de solución de los problemas, se observó que los equipos realizaron distintas actividades: seleccionaron unidades para los ejes, identificaron el dominio, determinaron elementos fijos y móviles para los modelos, graficaron y analizaron relaciones, buscaron soluciones geométricas y algebraicas. Estas fueron resultado de implementar los esquemas que se les propusieron para trabajar con GeoGebra.

En el problema 1, el primer equipo mostró un acercamiento donde se enfocó en construir la familia de triángulos de 48 *cm.* de perímetro para después analizar la relación entre sus lados. Es decir, se centró en dos tareas: (1) construir la figura y (2) analizar la variación de sus elementos para llegar a la solución sin necesidad de utilizar ecuaciones algebraicas. El recurso clave de la primera tarea fue el uso de circunferencias para trasladar medidas, y la estrategia para hallarlas fue analizar su comportamiento o relación a través del lugar geométrico (que dependía del movimiento ordenado del punto B) que corresponde al desarrollo de la segunda tarea. De este proceso se dio la posibilidad de discutir sobre el dominio del problema y de determinarlo, ya que no es común prestarle atención a este concepto cuando se resuelven este tipo de problemas.

En el caso del segundo equipo, llevó a cabo una tarea de variación sin construir la figura. La relación que exploró y analizó fue la del comportamiento del perímetro del triángulo cuando variaban las longitudes de sus lados, las cuales conservaban una relación de proporcionalidad. De esta manera, pudo representar y resolver algebraicamente el problema.

Para el segundo problema, en los dos acercamientos mostrados, a diferencia de los anteriores, se fijaron los mismos datos en los modelos (las velocidades) y se analizaron las relaciones en función del tiempo. Sin embargo, las representaciones de los datos y las formas de explorar y resolver el problema fueron distintas.

El lugar geométrico que exhibió el primer equipo fue el resultado de analizar cómo cambia la razón de las distancias recorridas por los corredores respecto al tiempo. En cambio, el segundo equipo analizó cómo se relaciona la diferencia entre las distancias recorridas por los corredores con el tiempo. El acercamiento algebraico de este problema solo lo desarrolló el primer equipo.

En general, el uso sistemático de GeoGebra permitió resolver los problemas de distintas formas y visualizar el tipo de relaciones que hay entre los datos. Además, aunque no todos pudieron resolver los problemas algebraicamente, valoran este resultado como una prueba que sustenta su solución gráfica. De hecho, si se presta atención a los acercamientos de los equipos que no mostraron una solución algebraica, puede notarse que sus modelos son más elaborados que los otros. Por lo tanto, parametrizarlos es más difícil.

Así, las formas de razonamiento que exhibieron los estudiantes durante este proceso se caracterizaron por:

- Interpretar los conceptos de un problema en términos de sus propiedades y atributos geométricos (en términos de la herramienta).
- Cuantificar los elementos del modelo.
- Identificar el dominio del problema.
- Definir una relación que permitirá hallar la solución en una infinidad de casos.
- Determinar la solución en términos del modelo.

A pesar de que el uso sistemático de un sistema de geometría dinámica promueve el estudio de relaciones entre los conceptos involucrados en los problemas verbales, sigue habiendo dificultades para conectar estas representaciones geométricas con las representaciones

algebraicas. No obstante, trabajar bajo este enfoque parece ofrecer una serie de posibilidades para el desarrollo del pensamiento algebraico y funcional.

The purpose of this study was to analyze how the systematic use of GeoGebra influences the ways of reasoning of high school students when they incorporate it in the resolution of word problems. The study was carried out with a group of 20 students who were studying Mathematics I. The results show that the students appropriated resources from the dynamic geometry system (GeoGebra) which, when used systematically, allowed them to implement strategies to represent geometrically the concepts involved in the problems, explore and analyze relationships between the elements of the dynamic models built and find the solutions. Thus, thanks to the exploration and analysis of relationships, it was possible to discuss with the students' concepts such as: ratio, domain, locus, variation.

Keywords: Problem Solving, Word Problems, Digital Technology, Algebra

Introduction

Covid-19 has caused a substantive change in the use of technologies for education. There has been a rapid dissemination of these to mitigate the problems caused by confinement. As far as Mathematics Education is concerned, the use of digital technologies is in a marginal status, since their implementation always lags the speed of digital evolution, even before the modifications forced by the Covid-19 pandemic, and even though it is a necessity in the 21st century for the teaching of mathematics (Cevikbas & Kaiser, 2020). Therefore, it is important that teachers know and strategically use various technologies, so that all students have the same opportunities and possibilities to access mathematics (National Council of Teachers of Mathematics, 2011).

Implementing digital technology in math classes can help lessen the technical aspects of algebra that arise when solving problems (Arcavi et al., 2017). This allows students to focus on developing resources and strategies that are useful for describing relationships and solving problems involving the construction and use of functional relationships, which are main objectives in the study of algebra because they favor the conceptual understanding of algebraic processes (Kieran, 2020). In this sense, it is valid to reflect on whether both the content and the way in which algebra is taught should be modified; In other words, questioning whether the topics taught in algebra and the way they are taught are adequate today (Thomas, 2017).

A common thread in the study of algebra is the resolution of word problems, ranging from basic to higher education (Amado et al., 2019). Through these, students are expected to experiment, articulate, and debate different approaches to the solution that promote the analysis and understanding of the main concepts and ideas of algebra. In fact, a well-received proposal among researchers and teachers to deal with these problems has been to develop the episodes and stages of the problem-solving framework (Blum and Niss, 1991; Verschaffel et al., 2000), because it favors the use of strategies and collaborative work in students.

However, research has been carried out on teaching proposals that include the use of technology in solving word problems to find out the impact they have on students. For example, Amado et al. (2019) presented results of a study where, in addition to working under the framework of problem solving, they used spreadsheets with the aim of observing how their tools can help high school students (between 13 and 14 years old) to represent and solve word problems and introduce them to formal algebraic methods. They found that, although the students had not yet learned to use algebraic representations (systems of equations of two or more unknowns) to solve word problems, the spreadsheet not only helped them to solve them, but also to interpret the solution as a value that satisfies a set of conditions that are associated with the equations.

In this context, the use of a dynamic geometry system (DGS) can be key for the development of algebraic and functional thinking in solving word problems, because it allows representing, exploring, and solving them from a geometric approach. Bozkurt and Uygan (2020) explain that DGS allow students to manipulate geometric objects and explore relationships between them. In addition, they identify drag as an effective strategy of these systems, which is the result of moving elements of the dynamic configurations without changing their underlying geometric relationships. Finally, they recognize their didactic potential, and the importance of not using them in a conventional way, as static software systems.

Although there have been studies that involve the use of digital technology in the resolution of verbal problems, there is still more evidence that reflects an efficient and adequate way of implementation (Verschaffel et al., 2020). So, with the aim of providing more evidence to this discussion, the following question was posed that guided the investigation: What type of reasoning do students at high school construct and exhibit when they solve word problems with the use of a dynamic geometry system (GeoGebra) under the problem-solving approach?

Conceptual Framework

Arcavi et al. (2017) identify five points that are key in teaching Algebra. The first is related to teaching algebra through contextualized situations or problems that consider the preliminary experiences and knowledge of the students. The second is to encourage practices that are productive: oriented towards activities or tasks that require higher-order thinking skills, such as finding different ways to solve them, evaluating the effectiveness of procedures, participating in class discussions, and reflecting on the methods or approaches shown. The third is to reconcile routine procedures with understanding, because although there is extensive discussion of whether they oppose or complement each other, both are needed to enhance algebraic thinking. The fourth is to see student mistakes as an opportunity to understand where or why they arise and thus prevent further occurrence. And the fifth point is to look for ways to make accessible and involve students in mathematical proofs or arguments, even if they seem abstract and formal to them.

On the other hand, Kieran (2020) identifies three types of activities in the study of algebra that are essential for the development of algebraic thinking: (a) interpretation and algebraic representation of situations, properties, patterns and relationships; (b) symbolic manipulation that allows the development of skills and conceptual aspects and; (c) implementation of algebra as a tool to model situations, justify and prove, make predictions and conjectures, look for relationships, and solve problems.

Now, regarding the use of digital technology, Santos-Trigo (2019) has identified that, when the use of an SGD is involved in solving problems, there are four types of tasks that can be carried out, which are characterized by the representations, strategies and forms of reasoning that arise in the solution processes: (a) focus on the figures. They are tasks that use an DGS to reconstruct the figures that are described in the problem statements or that appear as an image that accompanies the statement. Its value is in the need to identify the elements that make up the figures and explore the ways in which they are related; (b) research tasks. They transform routine problems, such as those found in textbooks, into a series of mathematical research and reflection activities; (c) variation tasks. In these, it is interesting to represent and analyze problems that involve variation phenomena by means of a graphic model without having to resort to an algebraic model; (d) dynamic configurations. The objective is to formulate problems from dynamic configurations and look for arguments that validate the mathematical relationships found.

These tasks not only provide information to solve problems, but also help to understand how the data and concepts involved are related. In addition, they can be done simultaneously when a problem is solved. For example, in word problems, students could focus on variation tasks, since most describe situations that involve variation phenomena, however, they could also direct their attention to *figure construction* tasks when the context of the problems is also geometric.

Considering this context, a framework that allows planning, organizing, and analyzing the ways in which students solve problems with the use of digital technology is important. In this sense, Santos-Trigo and Camacho-Machín (2013), based on the problem-solving framework proposed by Schoenfeld (1985) and on Polya's (1945) method to solve problems, articulate a framework that encompasses problem solving and the use of digital technology. This consists of four phases that are characterized by the type of questions that are posed in each one: (1) understanding the problem. How to represent the situation described in the problem in terms of the digital tools available?; (2) exploration. What strategies can be implemented with the available digital tools that allow us to explore the ways in which the explicit and implicit data of the problem are related?; (3) search for different approaches to the solution. From the explorations carried out in the second phase, how can they be used to obtain the solution?; (4) integration and reflections. What were the main ideas during the process? And what did the use of digital technology contribute to solving the problem?
Based on these ideas, the forms of reasoning that students exhibit during the resolution of word problems can be evaluated and characterized with the use of a dynamic geometry system.

Methodology

This research is qualitative, through observation and controlled interaction, the forms of reasoning exhibited by the students in the development of the tasks were characterized. A group of Mathematics I of high school was selected, which was made up of 20 students (between 15 and 17 years old), and it was worked with this for 24 sessions, where each session lasted two hours.

For the development of the sessions, there were 11 iPads with the GeoGebra application installed (10 for the students and one for the researcher) and a projector. Due to the limited number of iPads, teams of two students were formed and an iPad was assigned to each. The dynamic that was followed during the implementation of the problems, after having used the first four sessions to introduce them to the DGS, was to use one or two sessions for the teams to represent them, explore, solve and, later, discuss their results with everything the group using the projector.

So that student could solve problems with the use of the DGS, the following scheme was proposed (Figure 1):

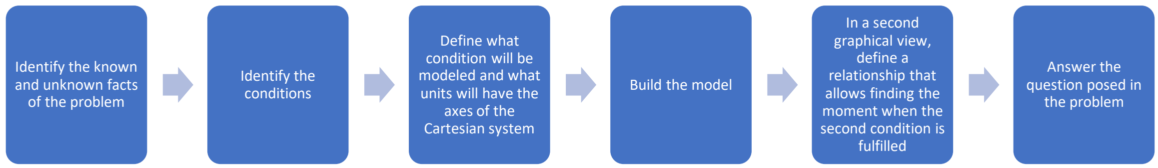

Figure 1: Scheme to solve word problems with the use of GeoGebra.

And so that they could represent algebraically the geometric solution found with the DGS, the following scheme was proposed (Figure 2):

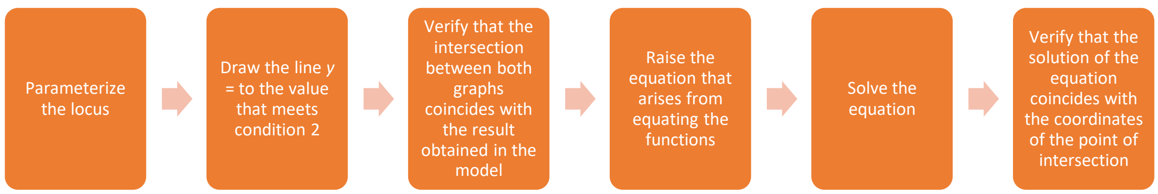

Figure 2: Scheme to algebrize the geometric representation.

The schemes were built based on the elements of the conceptual framework and emerged in response to results obtained in previous research (Gómez-Arciga et al., 2018; Gómez-Arciga & Reyes-Martínez, 2019).

For the selection of the problems, a list was made where they were categorized by their context, the sessions of a problem-solving seminar were worked on, and the most appropriate ones were identified to achieve the objectives of the study. In the results, the developments shown by different teams in solving two word problems are reported.

Data was collected through GeoGebra files, video recordings, and field notes. The latter were used to highlight some ideas that, at first, were considered important in the development of the sessions. Thus, when reviewing the video recordings, specific sections that had already been detected in class were analyzed.

Results

Two approaches to the solution are shown for each problem in this section. These were developed by different teams.

Problem 1: The perimeter of an isosceles triangle is 48 cm. If the different side is 2/3 the measure of the equal sides, what is the measure of the sides of the triangle?

The initial idea of the first approach was to construct a family of isosceles triangles with a perimeter of 48 cm. To achieve this, they drew the following (Figure 3): a segment AB on the horizontal axis, with A at the origin and B a moving point; a circle centered at A and with radius AB; a circle centered at B with radius $r = 48 - 2f$, where f was the length of segment AB; and the triangle ABD, where D was one of the intersections between the circles. Thus, the triangle ABD fulfilled the condition of being isosceles with $AB = AD$ and having a perimeter of 48 cm.

When the team used the drag test to show that their model was robust, they observed that the triangle only existed if B moved in the open interval (12, 24), which led to a discussion with the whole group about the domain of the problem and the relationship between the sides of the triangle so that it could be built.

Then, they defined the point $E = \left(a, \frac{2}{3}b - a\right)$ that related the unequal side to the difference of two thirds of one of the equal sides and the unequal one (a was the length of segment *BD*, and b, length of segment *AD*), to find the dimensions of the triangle that meets the remaining condition of the problem. The solution would be found when moving *B,* the ordinate of *E* was zero, which graphically meant finding the intersection of the locus described by *E* and the horizontal axis (Figure 4).

Finally, the team tried, but without success, to parameterize the locus to obtain the algebraic solution.

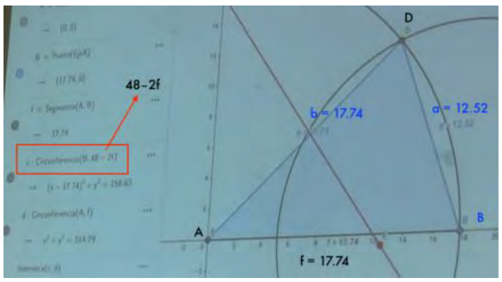

Figure 3: Construction of the family of isosceles triangles with perimeter of 48 *cm*.

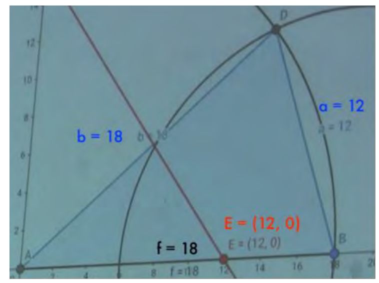

Figure 4: Dimensions of the triangle that meets the conditions of the problem.

The second approach, shown by another team, consisted of modeling the relationship between one of the equal and the different sides (it does not construct the triangle). To do this, the team drew a segment *AB*, with *A* at the origin and *B* a mobile point on the horizontal axis, and a segment *AC*, where *C* was the point of intersection between the vertical axis and the circumference with center at *A* and radius $r = \frac{2}{3}f$ (f was the length of segment *AB*) (Figure 5). With these traces, the team ensured that the length of segment *AC* was *2/3* of the length of segment *AB* for any position of point *B*. Then, the length of segment *AC* was associated with the measurement of the different side of the triangle, and the length of segment *AB*, measured by one of the equal sides.

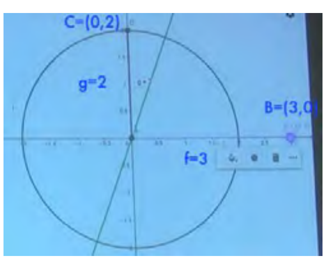

Figure 5: Model of the second approach.

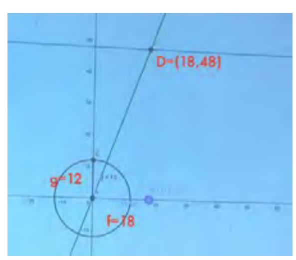

Figure 6: Graphical solution

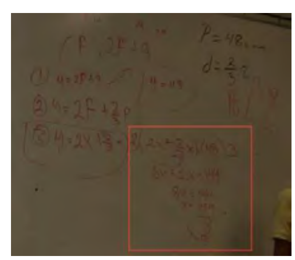

Figure 7: Algebraic solution.

Using the model, the team defined the point $D = (f, 2f + g)$ that related the measure of one of the equal sides of the triangle to its perimeter. The solution was obtained when the ordinate of point *D* was 48, because it met the conditions described in the statement. In Figure 6 it is observed that when the measure of the equal sides is 18 *cm* and that of the different one is 12 *cm*, the perimeter is 48 *cm*, and that the graphical solution is found at the intersection of the locus described by *D* and the line $y = 48$.

The parameterization and algebraic solution were adequately developed by the team. In Figure 7 the team raised the equation $2x + \frac{2}{3}x = 48$, which was the result of equating the function that arises from parameterizing the locus and the constant function (*y* = *48*) and solved it correctly.

Problem 2: In a certain athletics competition, runner *A* is 30 meters ahead of runner *B*. Runner *A* has a constant speed of 7 *km/h* and runner *B* has a constant speed of 8 *km/h*. If they both start at the same time, after how many meters will runner *B* catch up with runner *A*?

The first team to show their approach selected the units on the horizontal axis as seconds (time), and those on the vertical axis as *m/s* (velocity). The team chose the units of the axes this way because the problem asked to find a distance in meters. Consequently, the team converted the units of the runners' speeds: runner *A's* speed was $1.9\overline{4}$ *m/s*, and *B's* was $2.\overline{2}$ *m/s*.

In this way, since distance is the result of the product of time and speed, the team represented the distances traveled by the runners using areas of rectangles: in Figure 8 the length of segment *AB* (*f* = *2*) represented time, in seconds, elapsed from each runner; the lengths of segments *AD* and *AC*, the speeds of runners *A* and *B*, respectively; and the areas of the rectangles *ABED* (*c2* = *3.88*) and *ABFC* (*c1* = *4.4*), the meters covered by runners *A* and *B*, respectively. Thus, Figure 8 shows the numerical value of the distance covered by each runner in two seconds.

The team analyzed, using the locus described by the point $G = \left(c1, \frac{c2+30}{c1}\right)$, for what distance *c1* it was true that $\frac{c2+30}{c1} = 1$ (Figure 9); In other words, the team analyzed, through a ratio, how far runner *B* traveled to reach runner *A* (who, in the same time as B, has traveled $c2 + 30$ meters).

In Figure 9 it is observed that, at approximately 253 meters, runner *B* reached runner *A*, since it is the intersection between the locus and the line $y = 1$. Based on this result, the team was asked about the meaning of the ratio when it was less than or greater than 1: the team identified that when the ratio was less than 1, it meant that runner *B* had passed runner *A*; otherwise, *A* held first place.

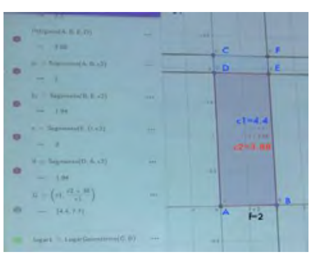

Figure 8: Model of the first approach of problem 2.

Figure 9: Exploration of the relationship between the distances covered by the runners.

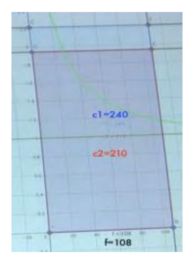

Figure 10: Robust graphical solution.

At the time of parametrizing and algebraically solving the problem, they found that the solution was 240 meters, which evidenced the margin of error caused by not strengthening the locus when they intersected it with the line $y = 1$. Once this imprecision in the model was corrected, they also observed that 108 seconds elapsed for runner *B* to reach runner *A* (Figure 10).

Another team, in its approach, represented the speeds of the runners as slopes of straights (Figure 11). To do this, he assigned units of hours to the horizontal axis and kilometer units to the vertical axis. So, to construct the lines with slopes of 7 and 8 units (*km/h*), the team defined points *B* and *C* on the vertical axis at 7 and 8, point *D* on the horizontal axis at 1, plotted perpendicular to the axes passing through these points, and with the intersections between them (points E and F), the team drew the line *AF* with slope 7 and the line *AE* with slope 8.

To represent the rest of the data, the team located a mobile point on the horizontal axis (point *G*), drew a perpendicular to the same axis passing through this point, marked the intersections of this with the lines (points *H* and *I*) and, using perpendicular to the vertical axis that passed through points *H* and *I*, they marked their intersections with the vertical axis (points *J* and *K*) (Figure 12). Thus, the AG segment represented the elapsed time (in hours) of the competition, and the *JK* segment or a segment the distance (in kilometers) between the runners in AG time (AK was the distance traveled by the first runner, and AJ, the distance traveled by the second).

In this way, the team defined the point $L = (AG,\ a)$ that related the time spent in the competition with the distance between the runners (Figure 12); and when its ordinate was 0.03 (30 meters), it obtained the distance traveled by runner *B* to reach runner *A* in the length of segment *AJ* (or in the ordinate of point *J = (0, 0.24)*). Although the team identified that the geometric solution was at the intersection of the L locus and the line $y = 0.03$, they did not develop the algebraic approach.

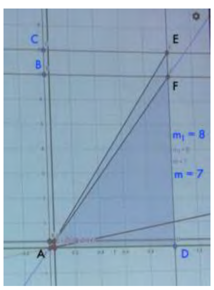

Figure 11: Speeds represented as slopes.

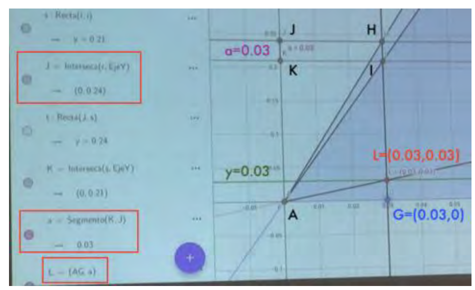

Figure 12: Geometric solution based on the slopes model.

Discussion of the results and conclusions

In the problem-solving processes, it was observed that the teams carried out different activities: they selected units for the axes, identified the domain, determined fixed and mobile elements for the models, plotted and analyzed relationships, and searched for geometric and algebraic solutions. These were the result of implementing the schemes that were proposed to them to work with GeoGebra.

In problem 1, the first team showed an approach where they focused on building the family of triangles with 48 *cm* perimeter and then analyzing the relationship between their sides. That is, he focused on two tasks: (1) constructing the figure and (2) analyzing the variation of its elements to arrive at the solution without using algebraic equations. The key resource of the first task was the use of circles to transfer measurements, and the strategy to find them was to analyze their behavior or relationship through the locus (which depended on the ordered movement of point *B*) that corresponds to the development of the second task. This process gave the possibility of discussing the domain of the problem and determining it, since it is not common to pay attention to this concept when solving this type of problem.

In the case of the second team, they carried out a variation task without building the figure. The relationship that the team explored and analyzed was that of the behavior of the perimeter of the triangle when the lengths of its sides varied, which conserved a proportional relationship. In this way, the team was able to represent and solve the problem algebraically.

For the second problem, in the two approaches shown, unlike the previous ones, the same data were set in the models (the speeds) and the relationships as a function of time were analyzed. However, the representations of the data and the ways to explore and solve the problem were different.

The locus exhibited by the first team was the result of analyzing how the ratio of the distances covered by the runners changes with respect to time. Instead, the second team looked at how the difference between the distances covered by the runners is related to time. The algebraic approach to this problem was only developed by the first team.

In general, the systematic use of GeoGebra allowed solving the problems in different ways and visualizing the type of relationships between the data. Furthermore, although not all of them were able to solve the problems algebraically, they value this result as a proof that supports their graphical solution. In fact, if you pay attention to the approaches of the teams that did not show an algebraic solution, their models are more elaborate than the others. Therefore, parameterizing them is more difficult.
Thus, the forms of reasoning that students exhibited during this process were characterized by:

- Interpret the concepts of a problem in terms of its geometric properties and attributes (in terms of the tool).
- Quantify the elements of the model.
- Identify the problem domain.
- Define a relationship that will allow finding the solution in an infinity of cases.
- Determine the solution in terms of the model.

Although the systematic use of a dynamic geometry system promotes the study of relationships between the concepts involved in word problems, there are still difficulties in connecting these geometric representations with algebraic representations. However, working under this approach seems to offer a series of possibilities for the development of algebraic and functional thinking.

References

Amado, N., Carreira, S., & Nobre, S. (2019). The Spreadsheet Affordances in Solving Complex Word Problems. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds), *Mathematical Problem Solving*. ICME-13 Monographs (pp. 91-109). Springer, Cham.

Arcavi, A., Drijvers, P. & Stacy, K. (2017). *The learning and teaching of algebra. Ideas, insights, and activities*. Routledge.

Bozkurt, G., & Uygan, C. (2020). Lesson hiccups during the development of teaching schemes: a novice technology-using mathematics teacher's professional instrumental genesis of dynamic geometry. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1349-1363. https://doi.org/10.1007/ s11858-020-01184-4.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

Cevikbas, M., & Kaiser, G. (2020). Flipped classroom as a reform-oriented approach to teaching mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 52(7), 1291-1305. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01191-5.

Gómez-Arciga, A., Olvera-Martínez, C., Aguilar-Magallón, D., & Poveda, W. E. (2018). Digital reasoning: Representing, exploring and solving word problems through the use of GeoGebra. En T. E. Hodges, G. J. Roy, & A. M. Tyminski (Eds), *Proceedings of the 40th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (pp. 1171-1186). Greenville, SC: University of South Carolina & Clemson University.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Gómez-Arciga, A., & Reyes-Martínez, I. (2019). Acercamientos geométricos a problemas verbales en un ambiente de resolución de problemas con GeoGebra. En S. Otten, A. G. Candela, Z. de Araujo, C. Haines, & C. Munter (Eds), *Proceedings of the forty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Pyschology of Mathematics Education* (pp. 820-828). St Louis, MO: University of Missouri.

Kieran, C. (2020). Algebra teaching and learning. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (2da ed., pp. 36-44). Springer.

National Council of Teacher of Mathematics (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making.* VA, Reston: National Council of Teacher of Mathematics.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical problem solving and the use of digital technologies. En P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds), *Mathematical problem solving*. ICME-13 Monographs (pp. 63-89). Springer, Cham.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Thomas, M. (2017). Rethinking algebra: A versatile approach integrating digital technology. En S. Stewart (Eds), *And the Rest is Just Algebra* (pp. 173-201). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7_10

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse.

Verschffeld, L., Depaepe, F., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2da ed., pp. 908-911). Springer.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.