A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY FOR THE UNDERSTANDING OF NUMBER DENSITY IN HIGH SCHOOL STUDENTS

UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN DE DENSIDAD NUMÉRICA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Mayra Suárez-Rodríguez
Cinvestav
mayra.suarez@cinvestav.mx

Ana Isabel Sacristán Rock
Cinvestav
asacrist@cinvestav.mx

During their school life, students learn mathematical topics that can be considered essential for the understanding of the property of density in the set of real numbers. Therefore, we detected a need to design and elaborate a Hypothetical Learning Path to include topics to help promote the learning of this property. This report shows results of a first stage of an educational experiment as part of an ongoing research. It describes how through the trajectory, high school students are able to recognize ways of finding numbers in an interval using various semiotic representations. We also describe some difficulties that students had to recognize the non-existence of a successor in real numbers.

Keywords: Learning Trajectories and Progressions, Number Concepts and Operations, Mathematical Representations, High School Education

Introduction and Research Questions

It has been seen that many students, from the beginning of their elementary school to the end of high school, even university school, show a deficiency in understanding the density property in the set of real numbers (Tirosh et al., 1999). In elementary school, the student only has one opportunity to learn about the density property of decimal numbers (Ávila & García, 2008). For example, in Mexico, the teacher shares with his sixth-grade students (around 12 years old) a unit related to this property using the number line (SEP, school year 2020-2021). In the project by Vamvakoussi and Vosniadou (2010), high school students between 12 and 17 years of age show difficulty in understanding the density property in real numbers. Some students in this project believe that there is no other number between 0.005 and 0.006, or between 1/3 and 2/3. That is, for them, these pairs of numbers are "consecutive" each. Students seem to believe in the existence of a successor in real numbers. And other participants in the study refer that there is a finite number of decimals between 0.005 and 0.006.

On the other hand, Vamvakoussi and Vosniadou (2010) have noted how there are students who are affected by the symbolic representation of the extremes of an interval. The authors observed that students tend to express that there are no fractions between decimals, that there can only be decimals; and vice versa. For this reason, it is important, as Duval (2004) points out, that different representations are handled throughout the students' school journey. According to Duval, teaching and learning mathematics implies that some cognitive activities (conceptualization, reasoning, comprehension, among others) require, in addition to natural language or that of images, the use of different registers of semiotic representation. For this author, in mathematics there are different writing systems for numbers, symbolic notations for objects, relations and operations, as well as a variety of graphs; each of the above activities constitutes a different semiotic form.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

In order to overcome the difficulty that students must understand the density property in real numbers, a Design Based Research is being carried out (Cobb & Gravemeijer, 2008), in which a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) was designed as a didactic proposal using various representation registers. Simon (1995) proposes that a HLT is a sequence of activities to attend to some mathematical concept, in which these activities are built from one or more hypotheses that support the student in the construction of new knowledge.

Considering the above and the problems that are generated to understand the density property, the following research questions were elaborated:

a) How to design a HLT to promote the learning of the density property in the set of real numbers?

b) How do high school students understand the property of density in real numbers using semiotic representations that can be produced during HLT?

Theoretical framework

Vamvakoussi and Vosniadou (2004) indicate that understanding the density property of rational numbers is a gradual process: from the discrete to the dense. The authors conclude that prior knowledge about natural numbers supports the student to use the property of the discrete to solve tasks related to rational numbers, in effect restricting the understanding of the density property. Using the ideas of Ni and Zhou (2005), the act of counting by a child is his first approach to a representation of the natural number, of the discrete; this representation persists in the child to such an extent that in problems related to fractions or decimals he considers properties of the natural numbers to solve them. Vamvakoussi and Vosniadou, in 2004, carried out an investigation to find out how much ninth-grade students (around 15 years of age) know about the number density, later, the authors elaborated five categories based on the responses of the participants (see Table 1).

Table 1: Categories of thinking about the quantity number of numbers in an interval

Naive thinking about the discrete	It is thought that there is no other number between two *consecutive false* rational numbers. Vamvakoussi and Vosniadou (2004) created this expression to refer that exists a successor of a rational number.
Advanced thinking about the discrete	It is thought there is a finite quantity of numbers between two consecutive false rational numbers.
Mixed thinking between discrete and dense	In some cases, it is thought that between two rational numbers there is an infinity of numbers; and in other cases, that there is a finite number.
Naive thinking about the dense	It is understood that there is an infinity of numbers in an interval, but this situation is not justified by using the density property. The symbolic representation of the extremes of an interval influences the way of thinking; it is believed there can only be an infinite number of decimal numbers between decimals and an infinity of fractions between fractions, but not an infinity of fractions between decimals or otherwise.
Advanced thinking about the dense	There is a sophisticated understanding of the density property; that is, it is understood that there is an infinite number of numbers between two rational numbers, regardless of their symbolic representation and this is justified through the use of the density property.

To understand the property of density in real numbers, it is necessary to consider that the real number has different representations (Apóstol, 2006). However, Duval (1983) points that this

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

task is not easy for a student, it is difficult for him to recognize the same mathematical object through various contexts of representation. As happened in the study done by Neuman (2001), seventh grade students (around 13 years old) did not accept that there could be a fraction between 0.3 and 0.6, since for them fractions and decimals were different mathematical objects that did not have any relationship. For Duval (1983), learning a mathematical concept requires the resource of several semiotic systems of representation, which implies a deeper mathematical thinking by the student.

Relevant aspects of an HLT

Complementing the definition of a HLT, Simon and Tzur (2004) describe that this expression refers to the predictions (hypotheses) that the researcher, or the teacher, think about how a student can challenge the proposed scenarios in a learning trajectory. The path becomes "real" (real trajectory) when the student's conceptions or ideas are known during the socialization of activities (Simon, 1995). For Simon, during the trajectory, the researcher can modify various aspects, including the duration and the design of the learning lessons, this as a result of the interactions that arise with the students. Thus, a HLT provides the researcher with a rational criterion to decide the design that he is considering, as well as the best hypothesis of how the learning process can advance in the student. Following the author's discourse, three essential components of a HLT are considered: a) *the objectives*, understood as the set of statements of which it is expected to carry out the fulfillment of the actions, b) *the route of the learning activities*, in which students progress, made up of increasingly complex levels with instructional activities that promote the passage from one level to another, and c) *hypotheses by the researcher*, understood as the conjectures that a researcher plans about the learning process.

Methodology

Our research methodology is situated in the context of Design Based Research (DBR), with a qualitative approach of a case study. DBR is a methodological approach in which the researcher tries to examine, in a systematic and detailed way, how students do proposed tasks, and analyzes teaching strategies and tools (Cobb & Gravemeijer, 2008). In terms of these authors, a DBR tries to experiment to support learning, through the design of an HLT. Cobb and Gravemeijer recommend testing and improving the conjectures or hypotheses outlined in the trajectory, which is why they suggest the execution of several cycles of analysis and design of activities. In the present investigation, we focus on a HLT for the learning of the number density, whose refinement contemplates two cycles. At this moment, the investigation is completing the first cycle of design and analysis.

Participants

The current population is made up of four students aged between 15 and 17, who are in high school in Colombia. Due to the COVID-19 pandemic, the activities have been carried out individually and hybrid, some at the student's home and others virtually, over a period of three months. This report will show the participation of two students, Néstor and Paola (pseudonyms), who completed the proposed HLT route.

HLT design

The educational experimentation corresponding to the first cycle has three phases, the first and third consist of the application of a pretest and posttest respectively, and the second consists of the HLT. This report will show results of the first and second phases, and on the conclusions section some details the last phase.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

First and second phase. Students solve a pretest and a posttest –with four questions–, each test lasts 30 minutes and measure how much they know about the discrete property of natural numbers and the density of real numbers. Through the pretest and the posttest, it is investigated whether at the end of the implementation of the HLT there have been changes in the way of reasoning of the student regarding the property of the discrete of the natural numbers, which is why the same questionnaire is used. The questions in this questionnaire were inspired by questions asked by Suárez-Rodríguez and Figueras (2020).

Second stage. In preparing this phase there are three objectives:

1. *Establish the stages of the HLT*. These stages are specified as levels of learning lessons, exactly four (see Table 2); however, it does not mean that the student depends on a previous level to complete the next. Each level lasts approximately one hour and 30 minutes.

2. *Define the hypotheses for each level*. The learning hypotheses are raised based on topics that students have studied in their school life and that it is believed that they can guide them to the understanding of density (see Table 2). McMullen and Van Hoof (2020) mention that although this property is not studied in class, there are moments in school mathematics that can provide opportunities to talk about it.

3. *Reach a metaconceptual awareness*. The student is expected to achieve metaconceptual awareness and can identify the characteristics that make a set dense. A student assumes a metaconceptual awareness when he reflects on some of his assumptions that they are not true, and that they also limit the way he interprets the new information (Vosniadou, 1994).

Table 2: HLT Levels and Hypotheses

Levels	*Hypotheses*
Level 1. First approaches to number density.	From two situations: one related to everyday life and the other related to a hypothetical scenario, it is thought that the student can have his first approaches to the property of density.
Level 2. Approach to number density through the similarity of triangles.	It is contemplated that by using triangle similarity students can learn about the density property of rational numbers.
Level 3. Approach to number density from arithmetic progressions and geometric progressions.	It is possible that by finding arithmetic and geometric halves in an interval the student understands the density property of rational numbers in the set of real numbers.
Level 4. Approach to numerical density through the property of continuity.	Using the continuity property, students are believed to understand the density property of irrational numbers in the set of reals.

Results

Pretest results

For the analysis of the responses given to the pretest by the students, the characterization made by Vamvakoussi and Vosniadou in 2004 was considered (Table 1).

Naive thinking about the dense. Figure 1 shows Néstor's response to the first item of the pretest. The process of infinite subdivisions in an interval was the representation that this student elaborated the most. It is observed how he uses decimal writing as a semiotic representation in an arithmetic register; and how he uses colloquial language to refer that there are infinite numbers between 0 and 1, and to express that the numbers follow the "same cycle". This last sentence

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

suggests that he does not consider the irrational numbers in the interval, since the numbers that he writes are numbers in periodic decimal writing.

1. How many numbers are there between 0 and 1? Explain your answer.

Rta: Para mi, los números que hay son infinitos. Porque sigue el mismo ciclo; y porque no tienen un final. Ej: Ejemplo. 0.111111....
0.111112....
0.111113....

Figure 1: Naive thinking about dense (example)

Naive thinking about the discreet. Figure 2 shows Paola's responses to the fourth item of the pretest. It is appreciated that Paola answers the questions according to her natural number knowledge. Apparently, Paola believes in the existence of "several successors" (0.2, 0.11, 0.111) in decimal numbers. The difficulty of her to perceive the equivalence between 0.1 and 0.10 is also appreciated, since she indicates that 0.2 is the successor of 0.1, but that if the number were 0.10, her successor would be 0.11.

4. Pedro wants to draw a line where he can locate decimal numbers. He starts with the number 0.1. Then he places the 0.2. At that point, Laura interrupts him and says that the number that "follows" 0.1 is 0.11.
a. Who is right, Pedro or Laura? Neither of them? Or both? Explain your answer.

Pedro tiene la razón, ya que después de 0,1 sigue 0,2, Laura tendría razón en el caso que fuera 0.10.

b. Is there a number that follows 0.1? If your answer is yes, write the number that you think follows 0.1. But if your answer is not affirmative, explain why.

Si, existe un número que le sigue a 0,1.
0,11, 0,111, 0,1111...

Figure 2: Naive thinking about discrete (example)

HLT Learning Lesson Results

Some actions of Paola and Néstor during the HLT are described.

Actions related to Level 1. In this first scenario, the students solved two learning lessons whose purpose is to have a first approach to density. In one of the lessons, the student must describe the movements that a frog makes (first the frog jumps halfway, then it jumps half of what was left, and so on). In Figure 3 it is seen that Néstor answers the question by approaching a thought related to the dense; however, his expression "too many times" can mean something finite. He uses a common language representation in his response. In the question in Figure 4, Néstor performs the procedure to find the following terms of the given sequence and uses semiotic representations such as fractional and exponential writing in an arithmetic register. In the last question (see Figure 5), he claims that there is an infinity of fractions between 0 and 1, but he does not justify with the density property.

2. How many times does the frog jump between points A and B? Explain your answer.

Rta: demasiadas veces; Porque la rana tarde o temprano va a llegar a su destino. [B]

4. Considering the previous question, how many fractions can you find between 0 and 1? Explain your answer.

Rta: se pueden encontrar infinitas fracciones porque hay una infinidad de números.

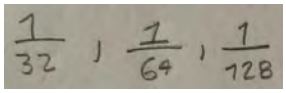
Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

Figure 3: Néstor's Record 1 (Level 1)

Figure 5: Néstor's Record 3 (Level 1)

3. If 1 is the distance between A and B, that is, the interval from 0 to 1, the sequence of terms that the frog performs is: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 ...
Now find the next three terms of the sequence. Describe your procedure.



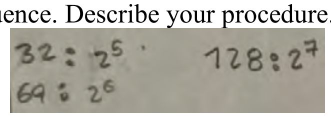


Figure 4: Néstor's Record 2 (Level 1)

Actions identified in Level 2. The learning lesson of this session is inspired by activities done by Tovar (2011). It is believed that by using similarity of triangles the student can understand the property of density to find middle terms in an interval. At first, the student reads the instructions so that he can construct similar triangles on a number line in GeoGebra. The image in Figure 6 shows the exercise carried out by Paola in which is observed that between "A0 and B1" (that is, between 0 and 1) she located the point *x*. She is asked to find this point. After thinking about it several times, Paola concludes that she must use proportions, as shown in Figure 7. She uses graphical representations of similar triangles in a geometric register, and in an algebraic register she finds the value of *x*. In the exercise instructions, the values of the segments, $\overline{AC}$ = 1 y $\overline{AD}$ = 2, are described for the resolution of this.

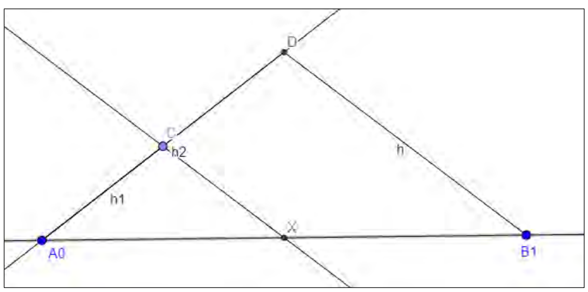


Figure 6: Paola's graph (GeoGebra)

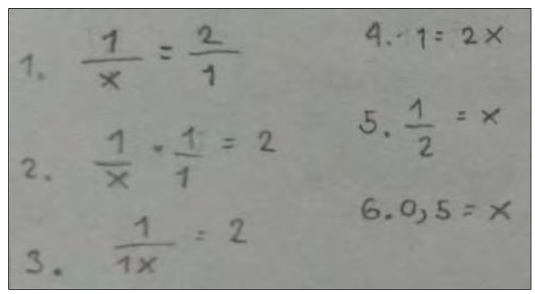
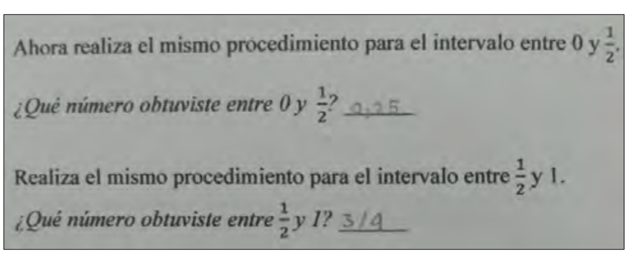


Figure 7: Paola's Record 1 (Level 2)

Paola continues to solve the questions (see Figure 8) that lead her to carry out the same procedure to find a number between 0 and 1/2 (see Figure 9), and another between 1/2 and 1. The numbers that she has found up to moment are: 0.25, 1/2 and 3/4; that is, the unit segment was divided into four equal parts. Finally, the students answer the question that appears in Figure 10. It is observed in this image that Paola approaches a thought related to the dense, since she contemplates that each time halves are obtained and that this has an infinite process. While Néstor, apparently, does not consider infinity but "several rational numbers", which could mean a finite quantity.


Ahora realiza el mismo procedimiento para el intervalo entre 0 y $\frac{1}{2}$.

¿Qué número obtuviste entre 0 y $\frac{1}{2}$? 0,25

Realiza el mismo procedimiento para el intervalo entre $\frac{1}{2}$ y 1.

¿Qué número obtuviste entre $\frac{1}{2}$ y 1? 3/4

Figure 8: Paola's Record 2 (Level 2)

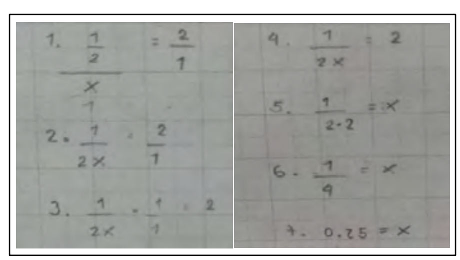
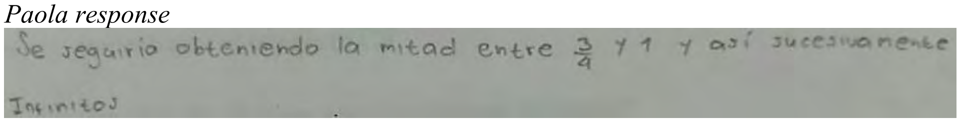


Figure 9: Paola's Record 3 (Level 2)

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

5. What happens if you continue to perform the same procedure between 3/4 and 1? And so on, how many rational numbers would you get?

Paola response



Néstor response

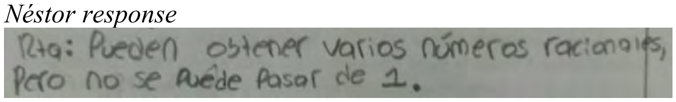


Figure 10: Record of Paola and Néstor in question 5 (Level 2)

Actions associated with Level 3. For this level, three learning lessons concerning arithmetic progressions and geometric progressions were designed to understand the density property of rational in real numbers. In one of the lessons the student reads a short paragraph about the definition of arithmetic progression. Next, the student must find five arithmetic means between 4 and 22 using the nth term of a sequence: $u = a + (n - 1)\, d$, in which a is the first term, n is the number of terms and d the difference between one term and another. In Figure 11 Paola's resolution to the exercise is shown –in an algebraic register – and she concludes that $d = 3$, and writes the terms found.

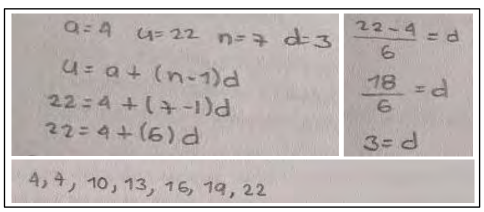


Figure 11: Paola's Record (Level 3)

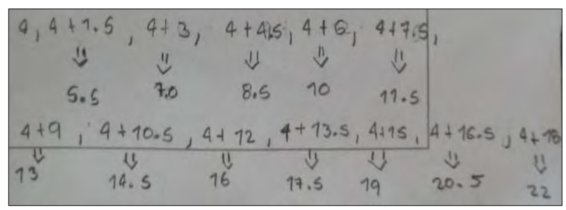


Figure 12: Néstor's Record (Level 3)

Subsequently, the student must answer the following situation: If d, from the previous question, were reduced by half, what would be the new arithmetic means between 4 and 22? Figure 12 shows that Néstor only uses the first term to find the new arithmetic means. He adds 1.5 to 4, then double 1.5 to 4, then triple 1.5 to 4, and so on until he reaches 22. Néstor makes use of representations of additions of decimal numbers in an arithmetic register. Finally, students are asked to find the arithmetic mean between a and u using the expression to find the nth term of a sequence. However, Paola and Néstor could not resolve this point of the activity because it seemed difficult to them.

Actions identified in Level 4. For this scenario, a learning lesson inspired by activities by Tovar (2011) was designed. It is expected that the student can learn the density of irrationals in reals, from the continuity of the line with respect to the non-correspondence between the rational numbers and the points of the line. Néstor explored in GeoGebra how the diagonal of a square with side 1 "translates" on the number line and observes that point x is between 1.2 and 1.6 (see Figure 13). Then he was asked to write four intervals where this point is located. To do this, he made several zooms on the GeoGebra screen and noted two intervals (see Figure 14). Both students observed that the point x does not correspond to a rational and that the intervals that enclose it are getting smaller and smaller. Finally, they found the diagonal of the square using the Pythagorean Theorem, and then concluded that between two rational numbers lies $\sqrt{2}$. However,

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

both students were still thinking about the presence of a successor, in this case for $\sqrt{2}$, when they were questioned about it, they did not answer what it could be. This leads us to think that since $\sqrt{2}$ is irrational, it is difficult for them to find a supposed successor even though they affirm its existence.

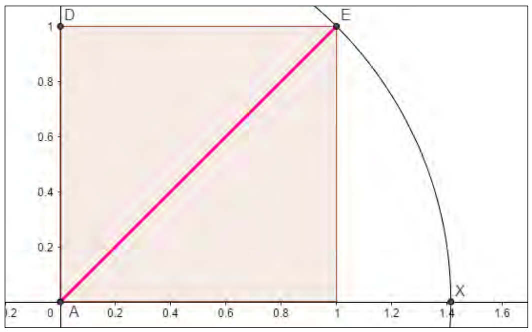


Figure 13: Néstor Record 1 (Level 4)

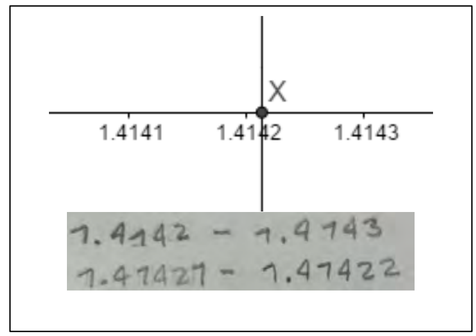


Figure 14: Néstor Record 2 (Level 4)

Conclusions

The design and development of the HLT involved the search and analysis of school mathematics topics that could guide the student to learn the number density. Topics such as similarity of triangles, arithmetic and geometric progressions, property of continuity and diagonal of a square, helped the students not only in their learning process but in their process of understanding the property of density. However, both students retained the idea of the existence of a successor in a set other than that of natural numbers. In the last phase of this first cycle, although the students improved their skills to find intermediate numbers in an interval, it was still difficult for them to make a metaconceptual awareness about the non-existence of a successor in the real numbers. This aspect will be considered for the refinement of the learning trajectory in the second cycle of activities. On the other hand, the students used various semiotic representations such as fractional and decimal writing. Colloquial language was one of the semiotic registers most used by students to express their thoughts in their own words. Finally, the hypotheses raised showed that it is feasible for the student to mitigate the difficulties on the density property. It is suggested that these hypotheses are more aimed at identifying characteristics that make a set dense as a discrete one, which would possibly lead to the understanding of a unique successor in natural numbers.

Acknowledgments

To Conacyt and Cinvestav for financing the research project.

References

Apóstol, T. (1996) *Análisis Matemático*. (2a ed.). Editorial Reverté, S.A.

Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, In A.E Kelly, R.A. Lesh, & J.Y. Baek (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14,

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

358-414.
Duval, R. 2004. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.
McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020) The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction*, 65, 101228. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228
Neumann, R. (2001). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Torner, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries: Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Munich, 1998* (pp. 97–104). Hildesheim, Germany: Gesellschaft f¨ur Didaktik der Mathematik.
Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, 27-52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3
SEP (2020). *Desafíos Matemáticos. Sexto grado. Libro para el alumno (ciclo escolar 2020-2021).* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/20/P6DMA.htm#page/2
Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145.
Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104.
Suárez-Rodríguez, M. & Figueras, O. (2020). An approach to density in decimal numbers: a study with pre-service teachers. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 803-819). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020-122
Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html
Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10182/johnedinsontovargil.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y
Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209. doi:10.1080/07370001003676603
Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4, 45-69.

A HYPOTHETICAL LEARNING TRAJECTORY FOR THE UNDERSTANDING OF NUMBER DENSITY IN HIGH SCHOOL STUDENTS

UNA TRAYECTORIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAJE PARA LA COMPRENSIÓN DE DENSIDAD NUMÉRICA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Mayra Suárez-Rodríguez
Cinvestav
mayra.suarez@cinvestav.mx

Ana Isabel Sacristán Rock
Cinvestav
asacrist@cinvestav.mx

Durante su vida escolar, el estudiante aprende temas de las matemáticas que podrían considerarse esenciales para la comprensión de la propiedad de densidad en el conjunto de los números reales. Por ello se contempló la necesidad de diseñar y elaborar una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje para incluir temas que ayuden a propiciar el aprendizaje de esta propiedad. Este informe muestra los resultados de la primera experimentación educativa de una

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

investigación que aún está en curso. Se expone la delineación de la trayectoria en la que el estudiante, de bachillerato, logra reconocer formas de hallar números en un intervalo usando varias representaciones semióticas. Así mismo, se describen algunas dificultades que tiene el estudiante para reconocer la no existencia de un sucesor en los números reales.

Palabras clave: trayectorias de aprendizaje y progresiones, conceptos de números y operaciones, representaciones matemáticas, educación media superior

Introducción y Preguntas de Investigación

Se ha visto que muchos estudiantes, desde que inician su educación primaria hasta que terminan con la educación media superior, incluso con la universitaria, muestran deficiencia para comprender la propiedad de densidad en el conjunto de los números reales (Tirosh et al., 1999). En la primaria, el estudiante solo tiene una oportunidad para aprender acerca de la propiedad de densidad de los números decimales (Ávila y García, 2008). Por ejemplo, en México, el docente comparte con sus estudiantes de sexto de primaria (alrededor de 12 años) una unidad relacionada con esta propiedad usando la recta numérica (SEP, ciclo escolar 2020-2021). En el proyecto de Vamvakoussi y Vosniadou (2010), estudiantes de secundaria (y bachillerato) entre 12 y 17 años de edad, muestran dificultad para comprender la propiedad de densidad en los números reales. Algunos estudiantes de este proyecto creen que no hay otro número entre 0.005 y 0.006, o entre 1/3 y 2/3. Es decir, para ellos, estos pares de números son "consecutivos" cada uno. Al parecer, los estudiantes creen en la existencia de un sucesor en los números reales. Y otros participantes del estudio mencionado, refieren que hay una cantidad finita de decimales entre 0.005 y 0.006.

Por otro lado, Vamvakoussi y Vosniadou (2010) han notado cómo hay estudiantes que se ven afectados por la representación simbólica de los extremos de un intervalo. Las autoras observaron que estudiantes tienden a expresar que no hay fracciones entre decimales, que solo puede haber decimales; y viceversa. Por ello, resulta importante, como señala Duval (2004), que se manejen representaciones diferentes a lo largo el trayecto escolar de los estudiantes. Según Duval, enseñar y aprender matemáticas conlleva a que algunas actividades cognitivas (conceptualización, razonamiento, comprensión, entre otras) requieran, además del lenguaje natural o el de las imágenes, la utilización de diferentes registros de representación semiótica. Para este autor, en matemáticas se encuentran distintos sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, relaciones y operaciones, así como también una variedad de gráficas; cada una de las actividades anteriores constituye una forma semiótica diferente.

Con miras a superar la dificultad que tienen los estudiantes para comprender la propiedad de densidad en los números reales, se está llevando a cabo una Investigación Basada en el Diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008), donde se diseñó una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) como una propuesta didáctica utilizando diversos registros de representación. Simon (1995) plantea que una THA es una secuencia de actividades para atender algún concepto matemático, donde dichas actividades se construyen a partir de una o varias hipótesis que apoyen al estudiante en la construcción de nuevos conocimientos.

Teniendo en cuenta lo anterior y la problemática que se genera para comprender la propiedad de densidad se elaboraron las siguientes preguntas de investigación:

a.) ¿cómo diseñar una THA para promover el aprendizaje de la propiedad de densidad en el conjunto de los números reales?, y
b.) ¿cómo estudiantes de bachillerato comprenden la propiedad de densidad en los números

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

reales usando representaciones semióticas que se pueden producir durante la THA?

Marco Teórico

Vamvakoussi y Vosniadou (2004) plantearon la hipótesis de que la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales es un proceso gradual: de lo discreto a lo denso. Las autoras concluyen que el conocimiento previo sobre los números naturales apoya al estudiante al uso de la propiedad de lo discreto para solucionar tareas vinculadas con los racionales, en efecto restringe la comprensión de la propiedad de densidad. Recurriendo a las ideas de Ni y Zhou (2005), el acto de contar por un niño es su primer acercamiento a una representación del número natural, de lo discreto; esta representación perdura en el niño a tal grado que en problemas vinculados con fracciones o decimales él toma en cuenta propiedades de los números naturales para solucionarlos. Vamvakoussi y Vosniadou, en el 2004, realizaron una investigación para conocer qué tanto saben los estudiantes de noveno grado (alrededor de 15 años de edad) acerca de la propiedad de densidad, posteriormente, elaboraron cinco categorías con base en las respuestas de los participantes (ver Tabla 1).

Tabla 1: Categorías del pensamiento sobre la cantidad de números en un intervalo

Pensamiento ingenuo sobre lo discreto	Se considera que no hay otro número entre dos números racionales *consecutivos falsos* (expresión instaurada por Vamvakoussi y Vosniadou, en 2004, para referir que existe un sucesor en los números racionales.)
Pensamiento avanzado sobre lo discreto	Se cree que hay un número finito de números intermedios entre dos números racionales consecutivos falsos.
Pensamiento compuesto entre lo discreto y lo denso	En algunas situaciones se piensa que entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números, y en otros, que hay una cantidad finita.
Pensamiento ingenuo sobre lo denso	Se contempla que hay una infinidad de números en un intervalo, pero no se justifica la situación usando la propiedad de densidad. La representación simbólica de los extremos de un intervalo influye en la forma de pensar; se cree que solo puede haber una infinidad de decimales entre decimales, pero no fracciones; de igual modo sucede con fracciones entre fracciones.
Pensamiento avanzado sobre lo denso	Hay una comprensión bastante sofisticada de la propiedad de densidad, es decir, se pone de manifiesto que se entiende que entre dos números racionales hay una infinidad de números, independientemente de su representación simbólica, y se justifica con la propiedad de la densidad.

Para comprender la propiedad de densidad en los números reales es necesario tener en cuenta que el número real tiene diversas representaciones (Apóstol, 2006). No obstante, Duval (1983) recalca que esta tarea no es sencilla para un estudiante, le cuesta reconocer el mismo objeto matemático a través de varios contextos de representación. Como sucedió en el estudio hecho por Neuman (2001), estudiantes de séptimo grado (alrededor de 13 años edad) no aceptaban que podía haber una fracción entre 0.3 y 0.6, pues para ellos las fracciones y los decimales eran objetos matemáticos distintos que no tenían relación alguna. En términos de Duval, el aprendizaje de un concepto matemático requiere del recurso de varios sistemas semióticos de representación, lo que implica un pensamiento matemático más profundo por el estudiante.

Aspectos relevantes de una THA

Complementando la definición de una THA, Simon y Tzur (2004) describen que esta expresión se refiere a las predicciones (hipótesis) que tiene el investigador, o el profesor, sobre cómo un estudiante puede desafiar los escenarios propuestos en un camino de aprendizaje. El camino se vuelve “real” (trayectoria real) cuando se conoce las concepciones o las ideas del estudiante durante la socialización de las actividades (Simon, 1995). Para Simon, durante el

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

recorrido de la trayectoria, el investigador puede ir modificando varios aspectos, entre ellos la duración y el diseño mismo de las lecciones de aprendizaje, esto como resultado de las interacciones que van surgiendo con los estudiantes. Así, una THA le proporciona al investigador un criterio racional para decidir el diseño que él está considerando, así como la mejor hipótesis de cómo puede avanzar el proceso de aprendizaje en el estudiante. Siguiendo el discurso de Simon, se consideran tres componentes esenciales de una THA: a) *los objetivos*, entendidos como el conjunto de enunciados de los que se espera llevar a cabo el cumplimiento de las acciones, b) *la ruta de las actividades de aprendizaje*, en la cual los estudiantes progresan, constituida por niveles cada vez complejos con actividades instruccionales que fomentan el paso de un nivel a otro, e c) *hipótesis planteadas por el investigador*, entendidas como las conjeturas que planea un investigador sobre el proceso de aprendizaje.

Metodología

Nuestra metodología de investigación se sitúa en el contexto de la Investigación Basada en el Diseño (IBD), con un enfoque cualitativo de un estudio de casos. La IBD es un enfoque metodológico en el que el investigador intenta examinar, de manera sistemática y minuciosa, cómo los estudiantes afrontan tareas propuestas, y también analiza estrategias y herramientas de enseñanza (Cobb y Gravemeijer, 2008). En términos de estos autores, en una IBD se intenta experimentar para apoyar el aprendizaje, a través del diseño de una THA. Cobb y Gravemeijer recomiendan ir probando y mejorando las conjeturas o las hipótesis que se esbozan en la trayectoria, razón por la cual sugieren la ejecución de varios ciclos de análisis y diseño de actividades. En la presente investigación, nos enfocamos en una THA para el aprendizaje de la propiedad de densidad, cuyo refinamiento contempla dos ciclos. En este momento la investigación está culminando el primer ciclo de diseño y análisis.

Participantes

La población de la investigación en curso está conformada por cuatro estudiantes con edades entre 15 y 17 años, quienes cursan la educación media vocacional (bachillerato) en Colombia. Debido a la pandemia de COVID-19, las actividades se han realizado de manera individual e híbrida, algunas en casa del estudiante y otras de manera virtual, durante un periodo de tres meses. En este informe se mostrará la participación de dos estudiantes, Néstor y Paola (pseudónimos), quienes completaron la ruta de la THA propuesta.

Diseño de la THA

La experimentación educativa correspondiente al primer ciclo tiene tres fases, la primera y tercera constan de la aplicación de un pretest y postest respectivamente, y la segunda se constituye de la THA. En este informe se mostrarán resultados de la primera y segunda fase, y en el apartado de las conclusiones se mencionarán detalles breves de la última fase.

Primera y segunda fase. Los estudiantes resuelven un pretest y un postest –de cuatro ítems– con una duración de 30 minutos cada uno, y miden qué tanto saben sobre lo discreto de los números naturales y lo denso de los números reales. A través del pretest y el postest se indaga si al final de la implementación de la THA ha habido cambios en forma de razonar del estudiante respecto a la propiedad de lo discreto de los números naturales, razón por la cual se utiliza el mismo cuestionario. Las preguntas de dicho cuestionario se inspiraron en preguntas hechas por Suárez-Rodríguez y Figueras (2020).

Segunda fase. En la preparación de esta fase se tienen tres objetivos:

1. *Establecer las etapas de la THA*. Se concretan estas etapas como niveles de lecciones de aprendizaje, exactamente cuatro (ver Tabla 2); sin embargo, no significa que el estudiante

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

dependa de un nivel anterior para completar el siguiente. Cada nivel tiene una duración de una hora y 30 minutos aproximadamente.

2. *Definir las hipótesis para cada nivel*. Se plantean las hipótesis de aprendizaje con base en temas que han cursado los estudiantes en su vida escolar y que se cree que pueden guiarles a la comprensión de la densidad (ver Tabla 2). McMullen y Van Hoof (2020) mencionan que si bien esta propiedad no se profundiza en clase, hay momentos de la matemática escolar que pueden proporcionar oportunidades para hablar de ella.
3. *Alcanzar una conciencia metaconceptual*. Se espera que el estudiante pueda lograr una conciencia metaconceptual para que pueda identificar las características que hacen que un conjunto sea denso. Un estudiante asume una conciencia metaconceptual cuando reflexiona sobre algunas de sus suposiciones y que estas no son ciertas, y que además limitan la forma en que interpreta la nueva información (Vosniadou, 1994).

Tabla 2: Niveles e hipótesis de la THA

Niveles.	*Hipótesis*
Nivel 1. Primeros acercamientos a la propiedad de densidad.	A partir de dos situaciones: una relacionada con la cotidianidad y otra vinculada con un escenario hipotético, se piensa que el estudiante puede tener sus primeros acercamientos a la propiedad de densidad.
Nivel 2. Acercamiento a la propiedad de densidad a través de la semejanza de triángulos.	Se contempla que usando semejanza de triángulos los estudiantes puedan aprender sobre la propiedad de densidad de los números racionales.
Nivel 3. Aproximación a la propiedad de densidad a partir de progresiones aritméticas y progresiones geométricas.	Es posible que hallando medios aritméticos y geométricos en un intervalo el estudiante comprenda la propiedad de densidad de los números racionales en el conjunto de los reales.
Nivel 4. Aproximación a la propiedad de densidad por medio de la propiedad de continuidad.	Se cree que usando la propiedad de continuidad los estudiantes comprenden la propiedad de densidad de los números irracionales en el conjunto de los reales.

Resultados

Resultados del pretest

Para el análisis de las respuestas dadas al pretest por los estudiantes se tuvo en cuenta la caracterización hecha por Vamvakoussi y Vosniadou en 2004 (ver Tabla 1).

Pensamiento ingenuo sobre lo denso. En la Figura 1 se muestra la respuesta de Néstor al primer ítem del pretest. El proceso de subdivisiones infinitas en un intervalo fue la representación que más elaboró este estudiante. Se observa cómo él usa la escritura decimal como representación semiótica en un registro aritmético; y cómo él usa lenguaje coloquial para referir que hay infinitos números entre 0 y 1, y para expresar que los números siguen el "mismo ciclo". Esta última frase hace pensar que él no toma en cuenta a los números irracionales en el intervalo, pues los números que él anota son números en escritura decimal periódica.

1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 1? Justifica tu respuesta.

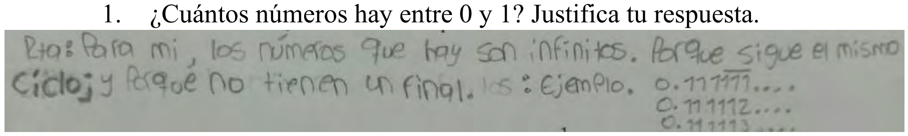


Figura 1: Pensamiento ingenuo sobre lo denso (ejemplo)

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

Pensamiento ingenuo sobre lo discreto. En la Figura 2 se muestran las respuestas de Paola al cuarto ítem del pretest. Se aprecia que Paola responde a las preguntas de acuerdo con sus conocimientos de número natural. Al parecer, Paola cree en la existencia de “varios sucesores” (0.2, 0.11, 0.111) en los números decimales. También se aprecia su dificultad para percibir la equivalencia entre 0.1 y 0.10, pues ella indica que 0.2 es el sucesor de 0.1, pero que si el número fuera 0.10, su sucesor sería 0.11.

4. Pedro quiere dibujar una línea donde pueda ubicar números decimales. Inicia con el número 0.1. Después coloca el 0.2. En ese momento, Laura lo interrumpe y dice que el número que “sigue” de 0.1 es 0.11. a. ¿Quién tiene la razón, Pedro o Laura?, ¿ninguno de los dos?, o ¿ambos? Justifica tu respuesta.

Pedro tiene la razón, ya que después de 0,1 sigue 0,2, Laura tendría razón en el caso que fuera 0.10.

b. ¿Existe un número que le sigue a 0.1? Si tu respuesta es afirmativa, escribe el número que crees que sigue a 0.1. Pero si tu respuesta no es afirmativa explica por qué.

Si, existe un número que le sigue a 0,1.
0,11 , 0,111 , 0,111...

Figura 2: Pensamiento ingenuo sobre lo discreto (ejemplo)

Resultados de las lecciones de aprendizaje de la THA

Se describen algunas actuaciones de Paola y Néstor durante la puesta en marcha de la THA.

Actuaciones vinculadas con el Nivel 1. En este primer escenario los estudiantes solucionaron dos lecciones de aprendizaje cuya finalidad es tener un primer acercamiento a la densidad. En una de las lecciones, el estudiante debe describir los movimientos que efectúa una rana (primero salta a la mitad, luego salta la mitad de lo que quedó, y así sucesivamente). En la Figura 3 se contempla que Néstor responde la pregunta acercándose a un pensamiento afín con lo denso; no obstante, su expre masiadas veces” puede significar algo finito. Él usa una representación de lenguaje común en su respuesta. En la pregunta de la Figura 4 se aprecia que Néstor realiza el procedimiento para hallar los siguientes términos de la sucesión dada, y usa representaciones semióticas como las escrituras fraccionaria y exponencial en un registro aritmético. En la última pregunta (ver Figura 5), aunque él afirma que hay una infinidad de fracciones entre 0 y 1, no justifica con la propiedad de densidad.

2. ¿Cuántas veces saltará la rana entre los puntos A y B? Explica tu respuesta.

Rta: demasiadas veces; Por que la rana tarde o temprano va a llegar a su destino. [B]

Figura 3: Registro 1 de Néstor (Nivel 1)

4. Teniendo en cuenta la pregunta anterior, ¿cuántas fracciones puedes encontrar entre 0 y 1? Justifica tu respuesta.

Rta: se pueden encontrar infinitas fracciones Por que hay una infinidad de números.

Figura 5: Registro 3 de Néstor (Nivel 1)

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

3. Suponiendo que 1 es la distancia entre A y B, es decir, el intervalo de 0 a 1, la sucesión de términos que realiza la rana es: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots$
Ahora, halle los siguientes tres términos de la sucesión. Describe su procedimiento.

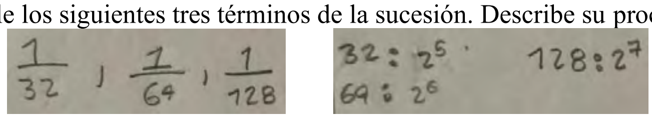


Figura 4: Registro 2 de Néstor (Nivel 1)

Actuaciones identificadas en el Nivel 2. La lección de aprendizaje de esta sesión está inspirada en actividades hechas por Tovar (2011). Se cree que al usar semejanza de triángulos el estudiante puede comprender la propiedad de densidad para hallar términos medios en un intervalo. Al principio, el estudiante lee las instrucciones para que pueda construir triángulos semejantes sobre una recta numérica en GeoGebra. La imagen de la Figura 6 muestra el ejercicio realizado por Paola en la que se observa que entre "A0 y B1" (es decir, entre 0 y 1) 1 punto *x*. Se le pide que halle este punto. Después de pensarlo varias veces, Paola concluye que debe usar proporciones, como se nota en la Figura 7. Ella emplea representaciones gráficas de triángulos semejantes en un registro geométrico, y en un registro algeraico halla el valor de *x*. Cabe mencionar que en las instrucciones del ejercicio están descritos los valores de los segmentos, $\overline{AC} = 1$ y $\overline{AD} = 2$, para la resolución de este.

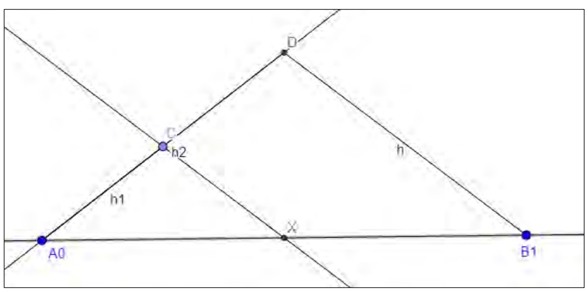


Figura 6: Gráfica de Paola (GeoGebra)

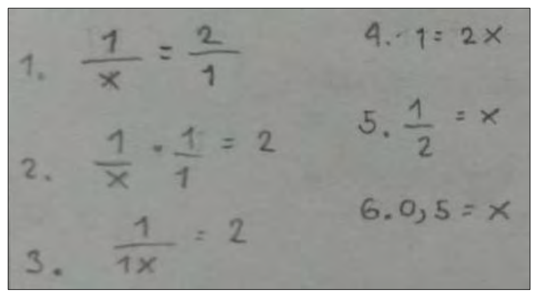
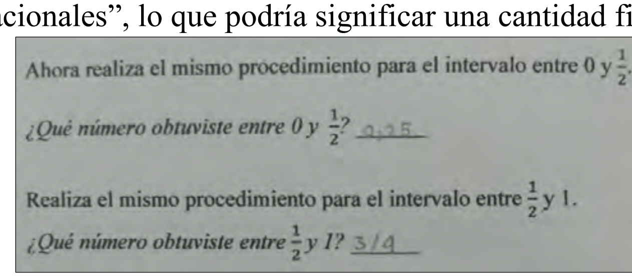


Figura 7: Registro 1 de Paola (Nivel 2)

Paola continúa solucionando las preguntas (ver Figura 8) que conllevan a efectuar el mismo procedimiento para hallar un número entre 0 y 1/2 (ver Figura 9), y otro entre 1/2 y 1. Los números que ha encontrado ella hasta el momento son: 0.25, 1/2 y 3/4; es decir, el segmento unitario fue dividido en cuatro partes iguales. Finalmente, los estudiantes responden la pregunta que aparece en la Figura 10. Se observa en esta imagen que Paola se acerca a un pensamiento afín con lo denso, pues contempla que cada vez se obtienen mitades y que esto tiene un proceso infinito. Mientras que Néstor, al parecer, no considera la infinidad sino "varios números racionales", lo que podría significar una cantidad finita.


Ahora realiza el mismo procedimiento para el intervalo entre 0 y $\frac{1}{2}$.

¿Qué número obtuviste entre 0 y $\frac{1}{2}$? 0,25

Realiza el mismo procedimiento para el intervalo entre $\frac{1}{2}$ y 1.

¿Qué número obtuviste entre $\frac{1}{2}$ y 1? 3/4

Figura 8: Registro 2 de Paola (Nivel 2)

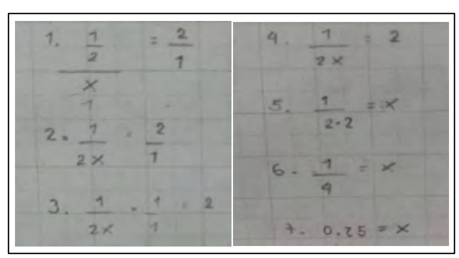
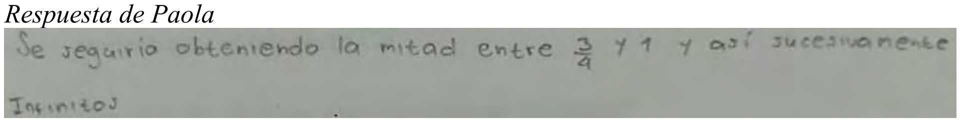


Figura 9: Registro 3 de Paola (Nivel 2)

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

5. ¿Qué sucede si continúas realizando el mismo procedimiento entre $\frac{3}{4}$ y 1? Y así sucesivamente, ¿cuántos números racionales se obtendrían?

Respuesta de Paola



Respuesta de Néstor

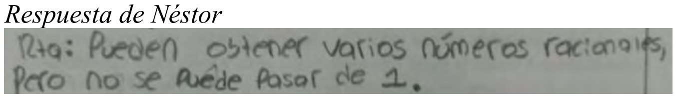


Figura 10: Registro de Paola y Néstor en la pregunta 5 (Nivel 2)

Actuaciones asociadas con el Nivel 3. Para este nivel se diseñaron tres lecciones de aprendizaje concernientes a progresiones aritméticas y progresiones geométricas para comprender la propiedad de densidad de los racionales en los números reales. En una de las lecciones el estudiante lee un breve párrafo sobre la definición de progresión aritmética. En seguida, el estudiante debe hallar cinco medios aritméticos entre 4 y 22 usando el término n-ésimo de una sucesión: $u = a + (n - 1)d$, donde a es el primer término, n el número de términos y d la diferencia entre un término y otro. En la Figura 11 se muestra la resolución de Paola al ejercicio –en un registro algebraico– y concluye que $d = 3$, y escribe los términos hallados.

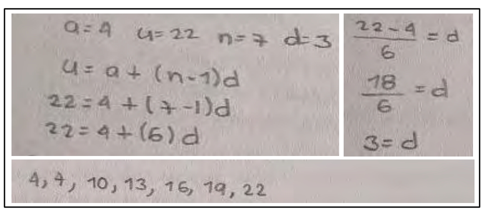


Figura 11: Registro de Paola (Nivel 3)

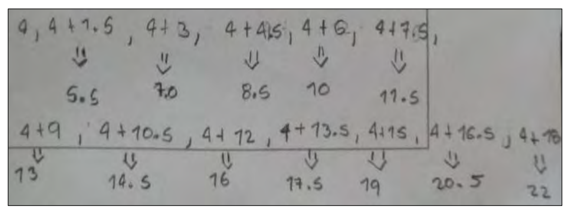


Figura 12: Registro de Néstor (Nivel 3)

Posteriormente, el estudiante debe responder la siguiente situación: *Si d, de la pregunta anterior, se redujera a la mitad, ¿cuáles serían los nuevos medios aritméticos entre 4 y 22?* En la Figura 12 se muestra que Néstor solo utiliza el primer término para encontrar los nuevos medios aritméticos. Él suma 1.5 a 4, luego suma el doble de 1.5 a 4, en seguida, el triple de 1.5 a 4, y así hasta llegar a 22. Néstor hace uso de representaciones de sumas de números decimales en un registro aritmético. Finalmente, se les solicita a los estudiantes hallar la media aritmética entre a y u usando la expresión para hallar el término n-ésimo de una sucesión. Sin embargo, Paola y Néstor no pudieron resolver este punto de la actividad porque les parecía difícil.

Actuaciones identificadas en el Nivel 4. Para este escenario se diseñó una lección de aprendizaje inspirada en actividades de Tovar (2011). Se espera que el estudiante pueda aprender la densidad de los irracionales en los reales, a partir de la continuidad de la recta con respecto a la no correspondencia entre los números racionales y los puntos de la recta. Néstor exploró en GeoGebra c a diagonal de un cuadrado de lado 1 se "traslada" sobre la recta numérica y observa que el punto x está entre 1.2 y 1.6 (ver Figura 13). Luego se le pidió escribir cuatro intervalos en donde esté ubicado este punto. Para ello, él efectuó varios zooms en la pantalla de GeoGebra y anotó dos intervalos (ver Figura 14). Ambos estudiantes observaron que el punto x no corresponde a un racional y que cada vez son más pequeños los intervalos que lo encierran.

Olanoff, D., Johnson, K., & Spitzer, S. (2021). *Proceedings of the forty-third annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Philadelphia, PA.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

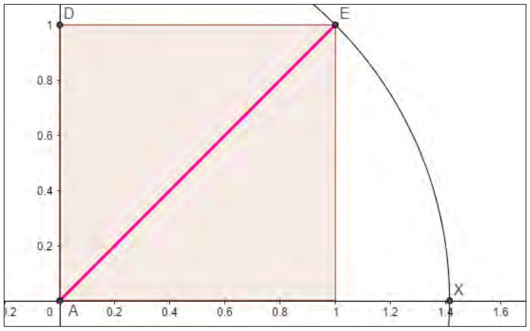


Figura 13: Registro 1 de Néstor (Nivel 4)

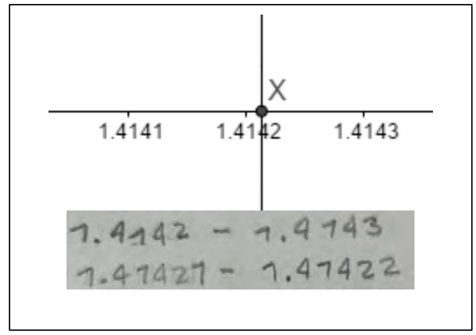


Figura 14: Registro 2 de Néstor (Nivel 4)

Por último, hallaron la diagonal del cuadrado por medio del Teorema de Pitágoras, y luego concluyen que entre dos números racionales se encuentra $\sqrt{2}$. No obstante, ambos estudiantes seguían pensando en la presencia de un sucesor, en este caso para $\sqrt{2}$ cuando se les cuestionó por ello, pero no respondieron cuál podría ser. Esto lleva a pensar que al ser $\sqrt{2}$ un irracional, les es difícil encontrar un supuesto sucesor pese a que ellos afirman su existencia.

Conclusiones

El diseño y elaboración de la THA implicó la búsqueda y análisis de temas de la matemática escolar que pudieran guiar al estudiante al aprendizaje de la propiedad de densidad. Temas como semejanza de triángulos, progresiones aritméticas y geométricas, propiedad de continuidad y diagonal de un cuadrado, ayudaron a los estudiantes no solo en su proceso de aprender sino en su proceso de comprender la propiedad de densidad. Sin embargo, ambos estudiantes conservaron la idea de la existencia de un sucesor en un conjunto que no sea el de los números naturales. En la última fase de este primer ciclo, aunque los estudiantes mejoraron sus habilidades para hallar números intermedios en un intervalo, todavía se les dificultaba hacer una conciencia metaconceptual sobre la no existencia de un sucesor en los números reales. Este aspecto se tendrá en cuenta para el refinamiento de la trayectoria de aprendizaje en el segundo ciclo de actividades. Por otro lado, los estudiantes emplearon varias representaciones semióticas como las escrituras fraccionaria y decimal. El lenguaje coloquial fue uno de los registros semióticos más usados por los estudiantes para expresar con sus propias palabras sus pensamientos. Finalmente, las hipótesis planteadas mostraron que es viable que el estudiante pueda mitigar las dificultades sobre la propiedad de densidad. Se sugiere que estas hipótesis se encuentren más encaminadas en la identificación de características que hace que un conjunto sea denso como de uno discreto, lo que conllevaría, posiblemente, a la comprensión de un sucesor único en los números naturales.

Agradecimientos

A Conacyt y a Cinvestav por el financiamiento del proyecto de investigación.

Referencias

Apóstol, T. (1996) *Análisis Matemático*. (2a ed.). Editorial Reverté, S.A.
Ávila, A. y García, S. (2008). *Los decimales más que una escritura*. México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, In A.E Kelly, R.A. Lesh, & J.Y. Baek (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.

Erlbaum Associates.
Duval, R. (1983). L'obstacle du dedoublement des objets mathematiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 358-414.
Duval, R. 2004. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.
McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020) The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction*, 65, 101228. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228
Neumann, R. (2001). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Torner, & B. Wollring (Eds.), *Developments in mathematics education in German-speaking countries: Selected papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Munich, 1998* (pp. 97–104). Hildesheim, Germany: Gesellschaft f¨ur Didaktik der Mathematik.
Ni, Y., & Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, 27-52. doi:10.1207/s15326985ep4001_3
SEP (2020). *Desafíos Matemáticos. Sexto grado. Libro para el alumno (ciclo escolar 2020-2021).* Ciudad de México: Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/20/P6DMA.htm#page/2
Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145.
Simon, M., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91–104.
Suárez-Rodríguez, M. & Figueras, O. (2020). An approach to density in decimal numbers: a study with pre-service teachers. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 803-819). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020-122
Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. O., & Wilson, J. W. (1999). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html
Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10182/johnedinsontovargil.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y
Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013
Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28(2), 181-209. doi:10.1080/07370001003676603
Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction*, 4, 45-69.

Articles published in the Proceedings are copyrighted by the authors.