DIDATIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND COMPETENCE OF PROSPECTIVE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS ON LINEAR VARIATION

CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE VARIACIÓN LINEAL

Karina Jaquelin Herrera-García
Universidad de Sonora
jaquelin_herrera@hotmail.es

María Teresa Dávila-Araiza
Universidad de Sonora
maria.davila@unison.mx

In this paper we describe an educational proposal for prospective secondary school mathematics teachers in Mexico, whose aim was to contribute to the development of their didactic-mathematical knowledge about linear variation through mathematical tasks, the development of the competence of identifying primary mathematical objects and the reflection on hypothetical cases of teaching. The proposal is supported within both the Onto-semiotic Approach (EOS) and the Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model. The proposal follows a design research methodology based on EOS. The results show the complexity related to the development of the competence of identifying primary mathematical objects, they also highlight the influence that competence has on the development of the epistemic and cognitive facets of prospective teachers' didactic-mathematical knowledge on linear variation.

Keywords: Teacher Education - Preservice; Mathematical Knowledge for Teaching; Middle School Education; Precalculus.

Introduction

Linear variation is an important mathematical topic that goes transversely trough the mathematics curriculum in Mexico, it is taught from the fifth year of primary education, becomes a central topic in secondary school (SEP, 2017), and its teaching continues in the upper secondary and higher educational levels.

The teaching of variation is essential because variation is a fundamental notion for the study of physical phenomena that can be observed in nature and found in people's daily experiences. These phenomena have the characteristic of being dynamic, that is, they involve processes that are constantly changing. Therefore, the teaching of variation should support students to make estimations, comparisons, and models that allow to explain the phenomena of change and solve problems demanded by their milieu (García & Ledezma, S / F; Caballero & Cantoral, 2015).

Despite the importance of teaching variation, particularly linear variation, the mathematics curriculum often promotes a static and limited teaching of this mathematical content in secondary school. In this regard, authors such as Bojórquez, Castillo, and Jiménez (2016), Panorkou, Maloney, and Confrey (2016), Thompson and Carlson (2017), and Vasco (2006) highlight that the variational thinking of students is not explicitly considered in the curriculum of mathematics in the elementary and secondary school. Also, they declare that mathematics textbooks are not formulated from a variational point of view and point out the notion of variable magnitude is missing in teaching of mathematics, despite the fact that they constitute a necessary basis for the learning of calculus at later educational levels. Instead, a static teaching of function as a correspondence rule is fostered, without any connection to variation.

Since curricula and textbooks are the primary materials available to secondary school mathematics teachers, and considering these documents foster a limited approach to the teaching of linear

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

variation, it becomes highly important that Mathematics Education provide concrete guidelines to support teachers to broaden their perspective about teaching linear variation.

It is particularly important that, in an early stage, teachers incorporate to their professional practice more enriched strategies for teaching linear variation than the ones suggested in mathematics curriculum. Consequently, it is pertinent to intervene in the initial teacher education, as Godino, Giacomone, Batanero and Font (2017) argue: “mathematics teacher education […] demands attention from the Mathematics Education, since the development of students' basic thinking and mathematical skills depend essentially on this education"(p. 91).

It is noteworthy that there is little research that provides specific orientations on how to strengthen didactic and mathematical teachers knowledge on linear variation in teacher training programs, despite the fact that different researchers have reported difficulties of mathematics teachers and prospective teachers in relation to notions closely linked to linear variation, such as function (Wilhelmi, Godino & Lasa, 2014, Amaya, Pino-fan & Medina, 2016) and proportionality (Balderas, Block & Guerra, 2014).

To address this problem, we designed, implemented, and evaluated a didactic proposal for the teaching of linear variation. We called it *formative proposal* because it is aimed at prospective mathematics teachers. The main goal was to enrich didactic-mathematical knowledge of prospective teachers on linear variation and to initiate them in the development of their competence for identifying primary mathematical objects related to this mathematical notion. The proposal was theoretically supported on both the Onto-semiotic Approach (EOS) and the Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC). It was followed a qualitative design research methodology that integrates some of the EOS theoretical tools. The formative proposal included the design of a sequence of didactic activities which included mathematics tasks and several questions and situations to prompt didactical reflections. To design the formative proposal we took into consideration the work of Herrera-Garcia (2020), who characterized several meanings of linear variation pertinent for teaching in secondary school (as a visual representation on the number line, as a graphical representation on the Cartesian plane, numerically as proportional variations of corresponding magnitudes, and as an algebraic formula).

This paper we describe both the stages of the methodology followed to design the formative proposal and the structure of the didactic sequence designed. In addition, we discuss some of the results obtained by its experimentation with prospective secondary school mathematics teachers. We also present part of the analysis of some of the prospective teachers 'productions corresponding to the second activity of the sequence, which allowed us to establish important relationships between the development of the teachers' competence of identification of primary mathematical objects and the development of their didactic-mathematical knowledge.

Theoretical Frame

We support the formative proposal on theoretical tools from the Onto-Semiotic Approach (OSA) to mathematical knowledge and instruction (Godino, Batanero & Font, 2007), as it provides important elements to elaborate an instructional design and methodological tools that allow guide its development and evaluating its implementation. To design the proposal, we used two fundamental theoretical notions (Godino, Batanero & Font, 2008): *institutional meaning* of a mathematical object (the system of mathematical practices shared into an institution to solve a same type of problems) and the typology of *primary mathematical objects*: *situations* (problems, exercises, etc.), *concepts* (given by definitions or descriptions), *languages* (terms, algebraic expressions, graphs, ...), *procedures* (techniques, algorithms, operations), *arguments* (statements to validate or explain) and Propositions (statements about concepts).

Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC)

Given the need for theoretical tools to characterize and evaluate the teacher's didactic-mathematical knowledge and skills, the Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge and Competence model (DMKC) has recently been developed within the EOS (Godino, Giacomone, Font and Pino-fan, 2018). This model emerged as an extension of the Mathematics Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge (DMK) model (Godino, 2009) and has been enriched by Godino and collaborators based on the EOS theoretical tools in several investigations (Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Godino & Font , 2015). In this model, it is considered that the mathematics teacher must have knowledge conserning of mathematical notions they teach (Pino- Fan & Godino, 2015). In addition, the teacher must have a didactic-mathematical (or specialized) knowledge of the different facets or dimensions that intervene in instructional processes: epistemic, ecological, cognitive, affective, mediational, and interactional. In this work, we consider only two facets: epistemic (didactic-mathematical knowledge about mathematics itself) and cognitive (knowledge about how students learn mathematics) (Godino, Giacomone, et al., 2017).

In addition to this, the DMKC model states that the prospective teacher must also develop a series of *didactic-mathematical competences* that allow him to face the problems of teaching mathematics. In particular, in this work we were interested in the competence of *ontosemiotic analysis of mathematical practices*, which, according to Godino, Giacomone, Batanero and Font (2017) consists in the identification of the network of primary mathematical objects and processes involved in mathematical practices, which allows the teacher to understand the progression of learning, manage the processes of institutionalization and evaluate the mathematical skills of their students. It is important to declare that we considered necessary, among all the elements contemplated in the competence mentioned above, the identification of primary mathematical objects in the mathematical practices carried out when addressing the didactic sequence, therefore, we call it in this paper *competence of identifying primary mathematical objects*.

Method

Methodological approach

We followed the methodology for design research proposed by Godino, Rivas, Arteaga, Lasa and Wilhelmi (2014), which integrates elements of both the design-based research methodology and Didactic Engineering within the theoretical tools of EOS. The methodology consisted of four stages; preliminary study (stablishing the institutional meaning of reference on linear variation), design of the didactic trajectory (elaborating didactic sequence by designing mathematical tasks using the primary mathematical objects related to the meanings of linear variation, the creation of GeoGebra applications and the design of tasks to prompt didactic-mathematical reflections), implementation of the didactic trajectory (implementation of the didactic sequence) and retrospective evaluation or analysis (the development of the above described competence and the epistemic and cognitive facets of the DMKC model).

Context and participants

The formative proposal was implemented with nine prospective mathematics secondary school teachers, who were in the eighth semester of Bachelor in a public institution in Mexico that provides programs for secondary school teachers initial education. The experimentatio was carried out in four sessions with a total duration of 15 hours. The designer of the formative proposal also served as the instructor.

Data Collection Instrument

The main instrument to collect the information was the sequence of didactic activities, which is made of five didactic activities with specific tasks for prospective teachers, supported by digital applications with GeoGebra according to the content of each activity. The activities started with a situation of variation in extra-mathematical context, some situations corresponded to linear variation and others did not, in order to help prospective teachers to distinguish when a situation corresponds or not to a case of linear variation. The didactic activities were printed on paper and given to each participant, who were designed with the letter "E" and a number from 1 to 9. The participants were asked to write their answers with different colored pen according to the working modality: black for individual work, red for teamwork and blue for group work.

Structure of the didactic sequence

Each of the activities is organized in three parts, addressing the following aspects: mathematical knowledge, didactic-mathematical knowledge, and the competence of identifying primary mathematical objects. In each of these three parts of the didactic activities different work modalities were considered: individual, team of three people and group discussion.

Part I: *Mathematical work*. This part of the sequence is intended for solving mathematical tasks aimed at enriching the meaning of linear variation of future teachers. For this, situations of linear variation and non-linear variation were proposed in various contexts, such as the relationship between the biological age of a dog and the years lived by him; the relationship between a person's weight (kg) and its height; filling and emptying of cylindrical containers. In these contexts, it was sought that future teachers manage to characterize linear variation based on the proportional relationship between the corresponding variations of two variable magnitudes in different forms of language: dynamic number lines in GeoGebra, Cartesian graphs, tables of values and algebraic expressions.

Part II: *Identification of the primary mathematical objects involved in the mathematical practices developed in Part I*. In the first didactic activity, it was sought that the future teachers express what they understood by three of the primary mathematical objects. To do this, they were asked the following questions: What is a mathematical concept for you?, What is a procedure for you?, What is a property / proposition for you?, adapted from the work of Giacomone (2018). It is important to mention that future teachers were not instructed in the use of EOS, but through group discussions they were guided so that, in a consensual way, they characterized those mathematical objects based on their initial ideas. Having established what is meant by that three mathematical objects, they were asked to identify those used in solving the mathematical tasks of Part I in each of the activities.

Part III: *Analysis of the answers given by hypothetical high school students*. This last part consists of the analysis of answers supposedly provided by students when addressing linear variation problems, with the aim that the prospective teacher analyzed the student's mathematical practice, determined whether or not it is correct and created strategies to guide and provide feedback to the student.

Data analysis and discussion

After the implementation of the five activities that integrated the didactic sequence, we carried out the analysis and interpretation of the answers provided by the prospective teachers. Below, we present some answers corresponding to the first two didactic activities of the sequence, which we interpreted from the perspective given by the theoretical referents chosen.

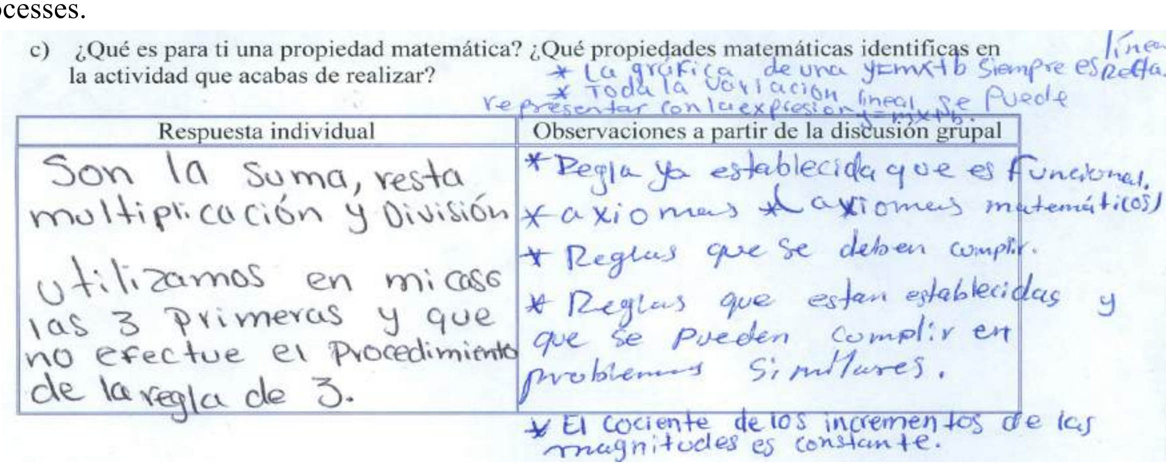
Identification of primary mathematical objects in the mathematical practices

An essential part for developing the competence of identifying primary mathematical objects both in their own and in their students' mathematical practices, is to have a wide perspective about the diversity of mathematical aspects involved in solving a mathematical task, that is, to understand each of the six primary mathematical objects. In this work, due to time constraints, we decided to limit the competence of identifying primary objects to the following three objects: procedures, concepts, and properties.

In the first didactic activity, the future teachers carried out the mathematical tasks of Part I, aimed at expanding their mathematical knowledge on linear variation. Then, in Part II, where future teachers were to explain what a concept, property, and procedure is, the following was found. The future teachers had no problem explaining what a *procedure* is to them and it was relatively easy to identify procedures such as the calculation of basic operations (addition, subtraction, multiplication, and division) in their practices. In the group discussion, the instructor asked questions in order to guide future teachers to recognize other types of procedures, so it is important to highlight that group interaction was essential for the identification of a wider variety of procedures, such as the "rule of three", the clearances of a variable, and the calculation the proportionality constant.

The mathematical object *concept* was a little more difficult to characterize by some teachers. For example, E8 expressed that a mathematical concept "is the problem with which we are working to find a solution", this suggests that for him a concept is the problem to be solved. Furthermore, E8 failed to use the notion he expressed to identify concepts in his own mathematical practices. On the other hand, the future professor E7, defined a concept as: "the meaning of a word" and identified term, equation, and magnitude as concepts in the work carried out in part I. Some of the concepts identified by future teachers individually are slope, proportionality, line, terms, proportionality constant, algebraic expression, and magnitude.

In contrast to the above, it was more difficult for future teachers to explain what a *property* is. For example, E5 expressed that a property "is a mathematical axiom" and E4 wrote that "it is an already established rule that is always functional". Both provided the algebraic expressions "$y = mx + b$" y "$K = \Delta y/\Delta x$" as examples of properties involved in part I of mathematical work, which might suggest that for them the properties have to be expressed algebraically. Other future teachers failed to provide examples of properties. On the other hand, E8 did not explain what a property was, but did mention addition and subtraction as examples. It is important to highlight the enrichment in the answers during the group discussion (this corresponds to the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge). In the bottom of the right column (Figure 1), in blue, it can be seen that E8 takes up the ideas of its peers and adds some examples of properties, such as: "The quotient of the magnitudes' increases is constant." This highlights the importance of interactions during mathematical instruction processes.


c) ¿Qué es para ti una propiedad matemática? ¿Qué propiedades matemáticas identificas en la actividad que acabas de realizar?
* La gráfica de una y=mx+b siempre es recta. línea
* Toda la variación lineal se puede representar con la expresión y=mx+b.

Respuesta individual	Observaciones a partir de la discusión grupal
Son la suma, resta multiplicación y división utilizamos en mi caso las 3 primeras y que no efectue el procedimiento de la regla de 3.	* Regla ya establecida que es funcional. * axiomas * axiomas matemáticos) * Reglas que se deben cumplir. * Reglas que estan establecidas y que se pueden cumplir en problemas similares.

* El cociente de los incrementos de las magnitudes es constante.

Figure 1. Enrichment of E8 answer after group discussion

Explaining what a concept and a property is was a difficult task for future teachers, as has already been reported by other researchers such as Giacomone (2018), Giacomone, Godino, Wilhelmi and Blanco (2018), Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer and Godino (2017), Burgos, Godino, Giacomone and Beltrán-Pellicer (2018b) and Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone and Godino (2018a). The recognition of these objects in mathematical practices is a competence that needs time to be developed, partly due to the difficulty of understanding what these primary mathematical objects are. However, the tasks proposed in the didactic sequence were motivating elements to initiate them in the development of that competence.

Gradually, in subsequent activities, future teachers were able to more consistently identify concepts, procedures, and properties in the mathematical practices carried out in the mathematical tasks about linear variation, which also highlights the development of the epistemic facet of their didactic-mathematical knowledge. In Activity 2, which dealt with the relationship between the weight and height of a person, expressed in a numerical table, prospective teachers identified new concepts and new properties of linear variation when creating a Cartesian graph and reflect on some the points obteinded from the table. For example, E5 said: "The slope of two pairs of different points must have the same value for linear variation. The union of the points should form a straight line" (Figure 2).

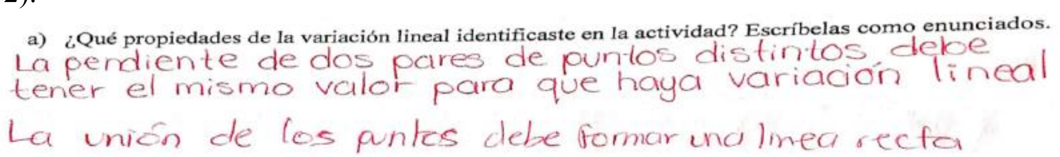

a) ¿Qué propiedades de la variación lineal identificaste en la actividad? Escríbelas como enunciados.
La pendiente de dos pares de puntos distintos debe tener el mismo valor para que haya variación lineal
La unión de los puntos debe formar una línea recta

Figure 2. E5 and E1 answer during teamwork

Furthermore, prospective teachers showed changes in the type of guidance they would give to students in the hypothetical teaching situations. Initially, their orientations were limited to and inclined towards manipulating algebraic expressions. After the mathematical work and the tasks aimed to identifying primary mathematical objects in Activity 2, they analyzed in more detail the hypothetical answer of a high school student (part III), who made a graph (Figure 3) with data on weight and height provided by the Mexican Social Security Institute, and stated the situation corresponded to a linear variation situation.

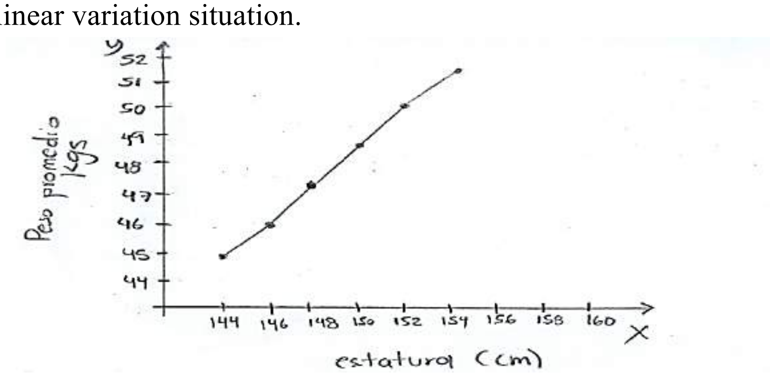


Figure 3. Graph drawn by a hypothetical high school student

Regarding the student's answer, the future teachers were asked: a) Do you agree with the student's answer?, B) What arguments would you give to reinforce your point of view and give feed back to the student?, And c) How Would GeoGebra help you to provide feedback to the student? In evaluating the student's answer, the future teachers used the primary mathematical objects identified in their own mathematical practices (Figure 2). For example, E1 (Figure 4) analyzed the graphical representation through the properties of linear variation that emerged in part I of this activity. He states that "the graphic is not a line because there is no proportionality between the magnitudes, nor between the magnitudes' increases". E1 evaluated the student's answer and concluded it is not correct; being able to make this assessment corresponds to the epistemic facet of didactic-mathematical knowledge.

a) ¿Estás de acuerdo con la información del estudiante? Justifica tu respuesta.

No, la gráfica no es una linea recta, no hay proporcionalidad entre las magnitudes, ni entre los incrementos de las magnitudes.

Figure 4. The future teacher E1 argues using properties of linear variation

We can find another example of the enrichement of future teachers didactic-mathematical knowledge in the answer of E9 (Figure 4) to the same situation, who first expresses that "visually the graph is not a line". Then, to provide feedback to the student, he proposes to choose pairs of points and identify that there is no constant variation. In addition, he states that GeoGebra would help the student by creating a line that would show that it does not cross all the points. These reflections of E9 on how it would orient a student, show the enrichment of the cognitive facet of its didactic-mathematical knowledge.

a) ¿Estás de acuerdo con la información del estudiante? Justifica tu respuesta.

No, visualmente se nota que no es una recta, ademas los puntos lo confirman.

b) ¿Qué argumentos le darías para reforzar tu punto de vista y retroalimentar al estudiante?

los puntos (144, 45) y (146, 46) muestran un incremento, pero en los demas pares de puntos no se ve la misma

c) ¿Cómo te ayudaría GeoGebra para retroalimentar al estudiante?

Podria crear una recta que pase por cualquiera de los puntos, se notara que no cruzan por la recta.

Figure 5. Prospective teacher E9 provides feedback to the student using GeoGebra

In the examples shown above, it can be identified that future teachers progressed in their professional knowledge, both mathematical and didactic-mathematical, since they provide arguments and orientations (in some cases using GeoGebra) based on different procedures, and properties of linear variation, which allowed them to assess whether or not the situations posed to them and to the hypothetical students correspond to situations of linear variation in different forms of language (algebraic, graphic, numerical and verbal). That is, the formative proposal allowed future teachers to enrich their specialized knowledge of mathematics, since they could identify in their own mathematical practices primary objects related to linear variation, and then, based on them, they could argue why some hypothetical responses of students were incorrect and propose feedback strategies for the student regarding the study of linear variation.

Conclusions

After analyzing the answers of future teachers, we concluded that the competence of identifying primary mathematical objects was a challenging task for them, as documented in studies such as that of Burgos et al. 2017. On the other hand, their answers suggests that they were able to gradually carry out more detailed analyzes of both their mathematical practices and the mathematical practices of the hypothetical students, since they showed a greater diversity of primary mathematical objects in the reflection tasks (parts II and III of the activities).

In the implementation of the activities, time was devoted to the discussion of ideas and the comparison of the answers given, this generated a very rich moment of exchange opinions and allowed prospective teachers to reflect on other mathematical objects that they had not identified by their own, so group discussions allowed them to enrich their initial answers.

A very important aspect that must be highlighted is that, initially, the didactic-mathematical reflections that the prospective teachers generated regarding the tasks set out, used to be very limited and lacking arguments. Subsequently, by working on the activities and the tasks set out to initiate them to develop the competence of identifying primary mathematical objects, they generated more detailed responses, which included the use of primary mathematical objects. This helped them to propose more detailed strategies to guide the students based on argumentation related to properties and procedures of linear variation previously identified in the part I (mathematical work). This highlights the importance of the development of this competence for their teaching practice, since it prompts prospective teachers carry out analysis of mathematical practices that take into account the diversity of primary mathematical objects related to the teaching and learning of a specific mathematical content.

References

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, *28*(3), 111-144.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, 51, 241-247.

Bojórquez A., Castillo, J. M., & Jiménez J. R. (2016). *Development of the variational thought in secondary students*. Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME) 2016. 29 de junio al 2 de julio de 2016. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México.

Caballero, M., & Cantoral R. (2015). *Pensamiento y lenguaje variacional: El principio estrella como un mecanismo de construcción social del conocimiento matemático*. CINVESTAV, México.

García, M., y Ledezma, F. R. (S/F). El estudio de la variación, primeras aproximaciones en la educación básica y su efecto en estudiantes de educación superior. *X congreso Nacional de Investigación Educativa*. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/0586-F.pdf

Godino, J. D. (2009). Categoría de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Hernández, S., Fernández, C., & Baptista, L. (2010). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Panorkou, N., Maloney, A., & Confrey, J. (2016). Expressing Covariation and Correspondence relationships in elementary schooling. Recuperado de https://nctm.confex.com/nctm/2014RP/webprogram/ExtendedAbstract/Paper1940/EQX_NCTM_040314%20.pdf

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA, 29*(51), 60-89.

SEP. Secretaría de Educación Pública. (2017). *Principales cifras del sistema educativo nacional 2016-2017.* Ciudad de México. SEP. Recuperado de: https://www.planeacion.sep.gob.mx/Doc/estadistica_e_indicadores/principales_cifras/principales_cifras_2016_2017_bolsillo.pdf

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Cali, Colombia. Recuperado de: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Wilhelmi, M., Godino, J. D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.

CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA SOBRE VARIACIÓN LINEAL

DIDATIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND COMPETENCE OF PROSPECTIVE SECONDARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS ON LINEAR VARIATION

Karina Jaquelin Herrera García
Universidad de Sonora
jaquelin_herrera@hotmail.es

María Teresa Dávila Araiza
Universidad de Sonora
maria.davila@unison.mx

Se describe una propuesta formativa para futuros profesores de secundaria en México, cuyo objetivo fue enriquecer sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre variación lineal a través de tareas matemáticas, del desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios y de la reflexión sobre casos hipotéticos de enseñanza. La propuesta se enmarca en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas; además, sigue una metodología de investigación de diseño fundamentada en el EOS. El análisis de los resultados muestra la complejidad inherente al desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios, pero resalta su impacto en el desarrollo de las facetas epistémica y cognitiva del conocimiento didáctico-matemático sobre variación lineal de los futuros profesores.

Palabras clave: Preparación de Maestros en Formación; Conocimiento matemático para la enseñanza; Educación secundaria; Pre-Cálculo.

Introducción y problemática

El estudio de la variación lineal abarca transversalmente el currículo de matemáticas en México; inicia en quinto año de educación primaria, se vuelve central en la escuela secundaria (SEP, 2017) y está presente en los niveles educativos medio superior y superior.

La enseñanza de la variación es importante porque ésta es una noción fundamental para el estudio de fenómenos físicos que se pueden observar en la naturaleza y que se encuentran en las vivencias cotidianas de las personas. Dichos fenómenos tienen la característica principal de ser dinámicos, es decir, involucran procesos que están en constante cambio. En este sentido, la enseñanza de la variación debe favorecer que los sujetos realicen estimaciones, comparaciones y construyan modelos que permitan explicar fenómenos de cambio y resolver situaciones que demande su entorno (García & Ledezma, S/F; Caballero & Cantoral, 2015).

A pesar de la importancia que tiene la enseñanza de la variación, particularmente la variación lineal, el currículo de matemáticas suele promover un estudio estático y limitado de este contenido matemático en la escuela secundaria. Al respecto, autores como Bojórquez, Castillo y Jiménez (2016), Panorkou, Maloney y Confrey (2016), Thompson y Carlson (2017) y Vasco (2006) destacan que el pensamiento variacional de los estudiantes no se desarrolla explícitamente en los planes de estudio de educación básica y que los libros de texto de matemáticas no están formulados desde un punto de vista variacional. Además, argumentan que no se promueve el estudio de magnitudes variables, a pesar de que constituyen una base necesaria para el estudio del cálculo en niveles educativos posteriores; en su lugar, se realiza un estudio estático de la función como regla de correspondencia, sin relación con la variación.

Dado que los planes de estudio y los libros de texto son los materiales principales que tienen a su disposición los profesores de matemáticas de secundaria, y en estos documentos es limitado el tratamiento propuesto para la variación lineal, es pertinente apoyar a los docentes en el desarrollo de una perspectiva más amplia de la variación lineal que oriente su práctica en el aula, de manera que la enseñanza de este tema no quede restringida a un enfoque estático y algebraico.

Particularmente, es importante fomentar de manera temprana que los profesores incorporen a su práctica docente tratamientos didácticos más enriquecidos para la variación lineal que aquellos planteados en el currículo. En este sentido, es pertinente intervenir en la etapa formativa de los profesores de matemáticas, como afirman Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017), "la formación didáctica de los profesores […] reclama atención por parte de la Didáctica de la matemática, pues el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas básicas de los alumnos depende, de manera esencial, de dicha formación." (p. 91).

Es importante resaltar que son pocas las investigaciones que orientan de forma concreta sobre cómo fortalecer el conocimiento matemático y didáctico sobre variación lineal en programas de formación de profesores, a pesar de que diferentes investigaciones han reportado dificultades en los profesores o futuros profesores de matemáticas con relación a dos nociones estrechamente vinculadas a la variación lineal, la función (Wilhelmi, Godino & Lasa, 2014, Amaya, Pino-fan & Medina, 2016) y la proporcionalidad (Balderas, Block & Guerra, 2014).

Para atender esta problemática, se diseñó, implementó y evaluó una propuesta didáctica para el estudio de la variación lineal, a la que denominó propuesta formativa por estar orientada a futuros profesores de matemáticas. El objetivo de dicha propuesta fue enriquecer conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores sobre variación lineal e iniciarlos el desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios relacionados con dicha noción matemática. La propuesta se fundamentó teóricamente en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM), y siguió una metodología cualitativa de investigación de diseño que integra las herramientas teóricas del EOS. La propuesta formativa incluyó el diseño de una secuencia de actividades con tareas matemáticas y de reflexión didáctica, para lo cual se caracterizaron diferentes significados de la variación lineal (como representación gráfica en rectas numéricas, como representación gráfica en el plano cartesiano, como representación tabular con variaciones proporcionales y como representación analítica) pertinentes para la educación secundaria. Tales significados se detallan ampliamente en Herrera-Garcia (2020) y ponen de manifiesto la diversidad de propiedades, procedimientos, representaciones, etc., que se pueden estudiar sobre la variación lineal desde un punto de vista variacional, y que es esencial que los profesores de secundaria conozcan para que puedan favorecerlos en el aula.

En este escrito se describirán a grandes rasgos las etapas de la metodología seguida para el diseño de la propuesta formativa y la estructura de la secuencia didáctica diseñada. Además, se discutirán algunos de los resultados obtenidos al implementar la secuencia didáctica con futuros profesores de matemáticas de secundaria, ilustrando con el análisis de las respuestas correspondientes a la segunda actividad de la secuencia, las cuales permiten establecer relaciones importantes entre el desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios y el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos de los futuros profesores.

Referentes teóricos

Para formular, implementar y valorar la propuesta formativa se tomó como referente teórico el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, EOS (Godino, Batanero & Font, 2007), pues aporta elementos significativos para elaborar un diseño instruccional y herramientas metodológicas que permiten estructurar su desarrollo y valorar su implementación. Fueron centrales para el desarrollo de la propuesta, por un lado, la noción de *significado institucional* de un objeto matemático, que se entiende como el sistema de prácticas matemáticas compartidas en una institución para resolver un tipo de situaciones problema y, por otro lado, la *tipología de objetos matemáticos primarios* que componen el significado de un objeto matemático (Godino, Batanero & Font, 2008): *situaciones problema* (problemas, ejercicios, tareas, etc.), *conceptos-definiciones* (introducidos mediante definiciones o descripciones), *lenguajes* (notaciones, expresiones, gráficos, etc., representados de manera escrita, oral, gestual, gráfica, tabular…), *procedimientos* (técnicas, algoritmos, operaciones), *argumentos* (enunciados para validar o explicar) *y proposiciones* (enunciados sobre conceptos).

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM)

Ante la necesidad de contar con herramientas teóricas que permitan caracterizar y evaluar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor, se ha desarrollado recientemente al seno del EOS el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Font y Pino-fan, 2018). Este modelo surge como una ampliación del modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas (CDM) (Godino, 2009) y ha sido enriquecido por Godino y colaboradores en diversas investigaciones (Pino-Fan & Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2015) con base en las herramientas teóricas del EOS. En este modelo se considera que el profesor de matemáticas debe tener conocimiento común y ampliado del contenido, es decir, conocimientos sobre las nociones matemáticas que se estudian en el nivel donde se desempeña y sobre contenidos correspondientes a los niveles posteriores (Pino-Fan & Godino, 2015). Además, el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático, o especializado, de las distintas facetas o dimensiones que intervienen en el proceso educativo: *epistémica*, *ecológica*, *cognitiva*, *afectiva*, *mediacional* e *interaccional*. En este trabajo se consideraron únicamente las facetas *epistémica* (conocimiento didáctico-matemático sobre las matemáticas mismas) y *cognitiva* (conocimiento sobre la manera como los estudiantes aprenden las matemáticas) (Godino, Giacomone, et al., 2017).

Aunado a esto, el modelo CCDM plantea que el futuro profesor también debe desarrollar una serie de *competencias didáctico-matemáticas* que le permitan hacer frente a los problemas de enseñanza de las matemáticas. En particular, en este trabajo se puso el interés en la *competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas*, que, según Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017) consiste en la identificación de la red de objetos matemáticos primarios y procesos intervinientes en las practicas matemáticas, que permite al profesor comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de sus alumnos. Es importante declarar que en este trabajo se consideró únicamente, de entre todos los elementos contemplados en esta competencia, la identificación de objetos matemáticos primarios puestos en juego en las prácticas matemáticas realizadas al abordar la secuencia didáctica diseñada, por ello, se hará referencia en este trabajo a la *competencia de identificación de objetos matemáticos primarios*.

Consideraciones metodológicas

Se siguió la metodología para investigaciones de diseño propuesta por Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014), que retoma elementos de la investigación basada en el diseño y de la Ingeniería Didáctica y los articula con las herramientas teóricas del EOS. La metodología consistió de cuatro etapas; *estudio preliminar* (determinar el significado institucional de referencia sobre variación lineal), *diseño de la trayectoria didáctica* (diseño de tareas matemáticas a partir de la elección de objetos matemáticos propios del significado de variación lineal, la creación de aplicaciones de GeoGebra y el diseño de tareas de reflexión didáctico-matemática que integraron en la secuencia didáctica), *implementación de la trayectoria didáctica* (implementación de la secuencia didáctica) y *evaluación o análisis retrospectivo* (del desarrollo de la competencia descrita y las facetas epistémica y cognitiva del modelo CCDM).

Contexto y participantes

La propuesta formativa se implementó con nueve futuros profesores de octavo semestre de Licenciatura en Educación secundaria con Especialidad en Matemáticas de una institución formadora de profesores en México. Se realizaron cuatro sesiones de trabajo con una duración total aproximada de 15 horas. La diseñadora de la propuesta formativa fungió como instructora.

Instrumento recolección de información

El instrumento principal para recopilar la información fue la secuencia de actividades didácticas, la cual se conformó por cinco actividades didácticas con tareas específicas para los futuros profesores, apoyadas en aplicaciones digitales diseñadas con GeoGebra acordes al contenido de cada actividad. Las actividades iniciaban con una situación problema de variación de contexto extramatemático, algunas eran de variación lineal y otras no, con el propósito de ayudar a los futuros profesores a identificar cuándo una situación problema corresponde o no a un caso de variación lineal. Las actividades didácticas fueron impresas en papel y entregadas a cada participante, a quiénes se designó con la letra “E” y un número del 1 al 9. Se dio la instrucción de escribir las respuestas con pluma de diferente color según la modalidad de trabajo: negro para el trabajo individual, rojo para el trabajo en equipo y azul para el trabajo grupal.

Estructura de las actividades de la secuencia didáctica

Cada una de las actividades se organizó en tres partes, atendiendo los siguientes aspectos: el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico-matemático y la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios. En cada una de estas tres partes de las actividades didácticas se consideraron diferentes modalidades de trabajo: individual, en equipo de tres personas y discusión grupal.

Parte I: *Trabajo matemático*. Esta parte de la secuencia se destinó a la resolución de tareas matemáticas orientadas al enriquecimiento del significado de variación lineal de los futuros profesores. Para ello, se propusieron situaciones de variación lineal y de variación no lineal en diversos contextos, como la relación entre la edad biológica de un perro y los años vividos; la relación entre el peso (kg) de una persona y su estatura; el llenado y vaciado de recipientes cilíndricos. En estos contextos se buscó que los futuros profesores lograran caracterizar la variación lineal a partir de la relación de proporcionalidad entre las variaciones correspondientes de dos magnitudes variables en diferentes formas de lenguaje: rectas numéricas dinámicas en GeoGebra, gráficas cartesianas, tablas de valores y expresiones algebraicas.

Parte II: *Identificación de los objetos matemáticos primarios involucrados en las prácticas matemáticas* desarrolladas en la parte I. En la primera actividad didáctica se buscó que los futuros profesores expresaran qué entendían por tres de los objetos matemáticos primarios. Para ello, se les plantearon las preguntas siguientes: ¿Qué es para ti un concepto matemático?, ¿qué es para ti un procedimiento?, ¿qué es para ti una propiedad/proposición?, adaptadas del trabajo de Giacomone (2018). Es importante mencionar que a los futuros profesores no se les instruyó en el uso del EOS, sino que a través de discusiones grupales se les guio para que, de manera consensuada, se caracterizaran dichos objetos matemáticos a partir de sus ideas iniciales. Una vez establecido qué se entendería por los tres objetos matemáticos mencionados, se les pidió que identificaran aquellos que intervinieron en la resolución de las tareas matemáticas de la Parte I en cada una de las actividades.

Parte III: *Análisis de respuestas dadas por estudiantes hipotéticos de secundaria.* Esta última parte consistió en el análisis de respuestas supuestamente proporcionadas por estudiantes al abordar situaciones problema de variación lineal, con el objetivo de que el futuro profesor analizara la práctica matemática del estudiante, determinara si era o no correcta y creara estrategias para orientar y retroalimentar al estudiante.

Análisis de datos y discusión de resultados

Tras realizar la implementación de las cinco actividades que conformaron la secuencia didáctica, se realizó el análisis e interpretación de las respuestas obtenidas. A continuación, se presentan algunas respuestas correspondientes a las primeras dos actividades didácticas de la secuencia, las cuales son interpretadas desde los referentes teóricos elegidos.

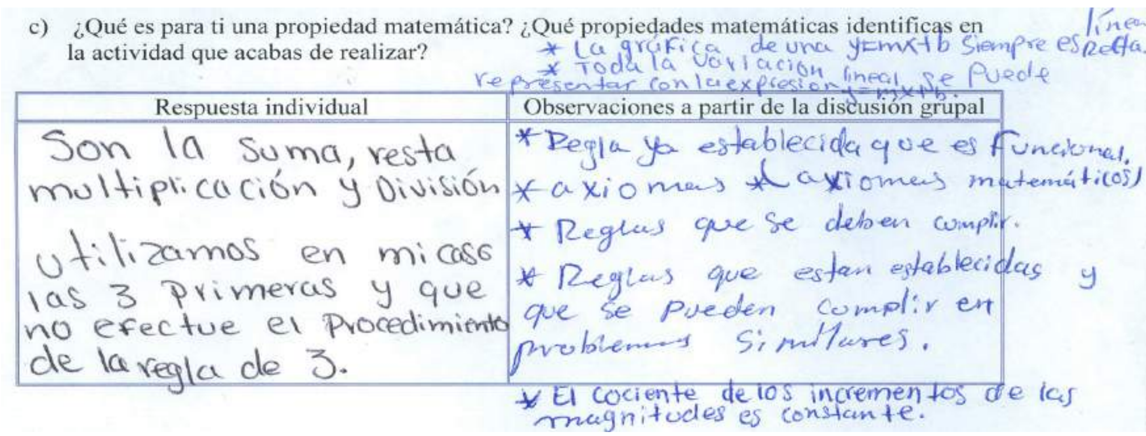
Identificación de objetos matemáticos primarios en sus prácticas matemáticas

Una parte esencial para el desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios en las prácticas matemáticas propias o de los estudiantes es tener claridad sobre la diversidad de aspectos matemáticos involucrados al resolver una tarea matemática, es decir, comprender cada uno de los seis objetos matemáticos primarios. En este trabajo, por limitaciones de tiempo, se decidió delimitar la competencia de identificación de objetos primarios a los tres siguientes: procedimientos, conceptos y propiedades.

En la primera actividad didáctica, los futuros profesores realizaron las tareas matemáticas de la Parte I, orientadas a ampliar sus conocimientos matemáticos sobre variación lineal. Luego, en la parte II, donde los futuros profesores debían explicar qué es un concepto, una propiedad y un procedimiento, se encontró lo siguiente. Los futuros profesores no tuvieron problemas para explicar qué es para ellos un procedimiento y fue relativamente sencillo identificar en sus prácticas procedimientos como el cálculo de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). En la discusión grupal, la instructora realizó preguntas que guiaran a los futuros profesores al reconocimiento de otros tipos de procedimientos, por lo cual es importante resaltar que la interacción grupal fue fundamental para la identificación de una variedad más amplia de procedimientos, como la regla de tres, los despejes, y el cálculo la constante de proporcionalidad.

El objeto matemático *concepto* fue un poco más difícil de caracterizar por algunos profesores. Por ejemplo, E8 expresó que un concepto matemático "es el problema con el que se está trabajando para darle una solución", lo cual sugiere que para él un concepto es el problema por resolver. Además, E8 no logró emplear la noción expresada para identificar conceptos en sus prácticas matemáticas. Por otro lado, el futuro profesor E7, definió un concepto como: "el significado de una palabra" e identificó término, ecuación y magnitud como conceptos en el trabajo realizado en la parte I. Entre los conceptos identificados por los futuros profesores de manera individual se encuentran: pendiente, proporcionalidad, rectas, términos, constante de proporcionalidad, expresión algebraica y magnitud.

En contraste con lo anterior, para los futuros profesores resultó más complicado explicar qué es una *propiedad*. Por ejemplo, E5 expresó que una propiedad "es un axioma matemático" y E4 escribió que "es una regla ya establecida que es funcional siempre". Ambos proporcionaron las expresiones algebraicas "$y = mx + b$" y "$K = \Delta y/\Delta x$" como ejemplos de propiedades intervinientes en la parte I de trabajo matemático, lo cual podría sugerir que para ellos las propiedades se expresan de manera algebraica. Otros futuros profesores no lograron proporcionar ejemplos de propiedades. Por otro lado, E8 no explicó que era una propiedad, pero mencionó a la suma y la resta como ejemplos. Es importante resaltar el enriquecimiento que se generó en las respuestas durante la discusión grupal de las respuestas (faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático). En la columna de la derecha (Figura 1), en color azul se puede observar que E8 retoma las ideas de sus compañeros y agrega algunos ejemplos de propiedades, como: "El cociente de los incrementos de las magnitudes es constante". Esto pone de manifiesto la importancia de las interacciones durante los procesos de instrucción matemática.


c) ¿Qué es para ti una propiedad matemática? ¿Qué propiedades matemáticas identificas en la actividad que acabas de realizar?

* La gráfica de una y=mx+b Siempre es recta. línea

* Toda la variación lineal se puede representar con la expresion y=mx+b.

Respuesta individual	Observaciones a partir de la discusión grupal
Son la suma, resta multiplicación y División utilizamos en mi caso las 3 primeras y que no efectue el Procedimiento de la regla de 3.	*Regla ya establecida que es funcional. *axiomas *axiomas matemáticos) *Reglas que se deben cumplir. *Reglas que estan establecidas y que se pueden cumplir en problemas similares.

* El cociente de los incrementos de las magnitudes es constante.

Figura 1. Enriquecimiento de la respuesta de E8 tras la discusión grupal

Explicar qué es un concepto y una propiedad fue una tarea difícil para los futuros profesores, como ya ha sido reportado por otros investigadores como Giacomone (2018), Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco (2018), Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino (2017), Burgos, Godino, Giacomone y Beltrán-Pellicer (2018b) y Burgos, Beltrán-Pellicer, Giacomone y Godino (2018a). El reconocimiento de estos objetos en las prácticas matemáticas es una competencia que necesita tiempo para ser desarrollada, en parte por la dificultad de comprender qué son estos objetos. Sin embargo, las tareas propuestas en la secuencia didáctica fueron elementos motivantes para iniciarlos en el desarrollo de su competencia.

Gradualmente, en las actividades posteriores, los futuros profesores lograron identificar de manera más consistente conceptos, procedimientos y propiedades en las prácticas matemáticas realizadas en torno al estudio del tema variación lineal, lo cual pone de manifiesto también el desarrollo de la faceta epistémica de su conocimiento didáctico-matemático. Por ejemplo, en la actividad 2, que trataba sobre la relación entre el peso y la estatura de una persona expresada en una tabla numérica, al crear una gráfica cartesiana los futuros profesores identificaron en sus prácticas matemáticas nuevos conceptos y nuevas propiedades de la variación lineal como las siguientes: "La pendiente de dos pares de puntos distintos debe tener el mismo valor para que haya variación lineal. La unión de los puntos debe formar una línea recta" (Figura 2).

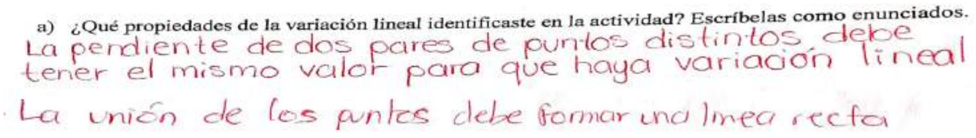

a) ¿Qué propiedades de la variación lineal identificaste en la actividad? Escríbelas como enunciados.
La pendiente de dos pares de puntos distintos debe tener el mismo valor para que haya variación lineal
La unión de los puntos debe formar una linea recta

Figura 2. Respuestas de E5 y E1 durante el trabajo en equipo

Además, los futuros profesores mostraron cambios en el tipo de orientaciones que darían a los estudiantes. Inicialmente, sus orientaciones eran limitadas y se inclinaban a la manipulación de expresiones algebraicas. Después del trabajo matemático y las tareas de identificación de objetos matemáticos primarios en la actividad 2, analizaron de manera más detallada la respuesta hipotética de un estudiante de secundaria (parte III), quien elaboró una gráfica (Figura 3) con datos del peso y la estatura propuestos por el Instituto Mexicano del Seguro Social, y afirmó que se tenía una situación de variación lineal.

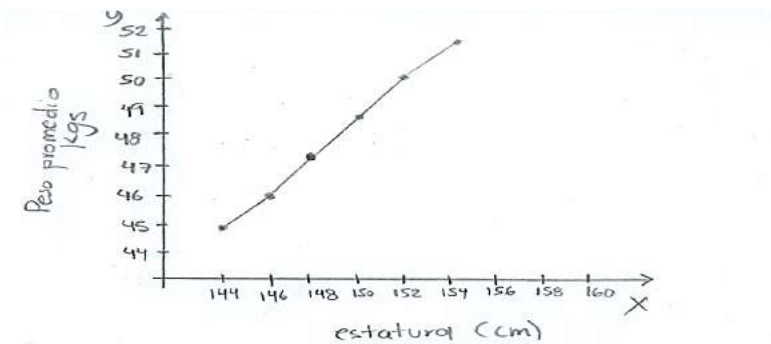


Figura 3. Gráfica trazada por un estudiante hipotético de secundaria

Se les preguntó a los futuros profesores: a) ¿Estás de acuerdo con la respuesta del estudiante?, b) ¿Qué argumentos le darías para reforzar tu punto de vista y retroalimentar al estudiante?, y c) ¿Cómo te ayudaría GeoGebra para retroalimentar al estudiante? Al valorar la respuesta del estudiante, los futuros profesores pusieron en juego los objetos matemáticos primarios identificados en sus prácticas (Figura 2). En la respuesta de E1 (Figura 4) se puede observar fue de su interés analizar la representación gráfica, pues afirma que "no hay proporcionalidad entre las magnitudes, ni entre los incrementos de las magnitudes", lo cual fue trabajado en la parte I de la actividad. A partir de ese análisis concluye que la respuesta del estudiante no es correcta (hacer esta valoración corresponde a la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático).

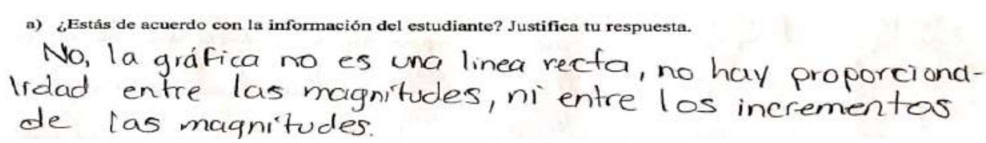

a) ¿Estás de acuerdo con la información del estudiante? Justifica tu respuesta.
No, la gráfica no es una linea recta, no hay proporcionalidad entre las magnitudes, ni entre los incrementos de las magnitudes.

Figura 4. El futuro profesor E1 argumenta usando propiedades de la variación lineal

Otro ejemplo es el de E9 (Figura 4), quien primero expresa que "visualmente la gráfica no es una recta". Luego, para retroalimentar al estudiante, propone elegir pares de puntos e identificar que no hay una variación constante. Además, expresa que GeoGebra ayudaría al estudiante mediante la creación de una recta que mostraría que no ésta no cruza por todos los puntos. Estas reflexiones de E9 sobre cómo orientaría a un estudiante, ponen de manifiesto el enriquecimiento de la faceta cognitiva de su conocimiento didáctico-matemático.

a) ¿Estás de acuerdo con la información del estudiante? Justifica tu respuesta.

No, visualmente se nota que no es una recta, además los puntos lo confirman.

b) ¿Qué argumentos le darías para reforzar tu punto de vista y retroalimentar al estudiante?

los puntos (144, 45) y (146, 46) muestran un incremento, pero en los demas pares de puntos no se ve la misma

c) ¿Cómo te ayudaría GeoGebra para retroalimentar al estudiante?

Podría crear una recta que pase por cualquiera de los puntos, se notará que no cruzan por la recta.

Figura 5. Respuesta de E9

En los ejemplos mostrados se puede identificar que los futuros profesores progresaron en sus conocimientos profesionales, tanto matemáticos como didáctico-matemáticos, pues muestran argumentaciones y orientaciones basadas en procedimientos diversos, y propiedades de la variación lineal en diferentes formas de lenguaje, que les permitieron valorar si las situaciones planteadas a ellos y a los estudiantes hipotéticos, corresponden o no a situaciones de variación lineal, en algunos casos utilizando GeoGebra. Es decir, la propuesta formativa permitió que los futuros profesores enriquecieran su conocimiento especializado del contenido de matemáticas, pues podían identificar en sus respuestas objetos primarios propios de la variación lineal, y después, con base a ellos, pudieron argumentar porqué algunas respuestas hipotéticas de los estudiantes estaban incorrectas y proponer estrategias de retroalimentación para el alumno en relación con el estudio de la variación lineal.

Conclusiones

Tras el análisis de las respuestas de los futuros profesores se concluye que la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios fue una tarea desafiante para ellos, como se había documentado en trabajos como el de Burgos et al. 2017. Por otro lado, el análisis de sus respuestas sugiere que lograron realizar análisis más finos de sus prácticas matemáticas y de las prácticas matemáticas de los estudiantes hipotéticos, ya que fueron manifestando mayor diversidad de objetos matemáticos primarios en las tareas de reflexión (partes II y III de las actividades).

En la implementación de las actividades se dedicó tiempo a la discusión de ideas y a la comparación de las respuestas dadas, esto generó un momento muy rico de intercambio de opiniones y permitió que los futuros profesores reflexionaran y comentaran sobre otros objetos matemáticos que no habían identificado, pero que con la discusión grupal lograron identificar, lo que permitió enriquecer sus respuestas.

Un aspecto muy importante y que es necesario destacar es que se observó que en un inicio las reflexiones didáctico-matemáticas que generaban respecto a las tareas planteadas, solían ser reflexiones muy limitadas y carentes de argumentos. Posteriormente con el desarrollo de las actividades y con las tareas planteadas para iniciarlos al desarrollo de la competencia de identificación de objetos matemáticos primarios, generaban respuestas más detalladas, que incluían el uso de los objetos matemáticos primarios, esto ayudaba a que las estrategias que proponían para orientar a los estudiantes tuvieran mayor peso en la argumentación basada en el uso de propiedades y procedimientos, identificados previamente en la resolución de las situaciones problema planteados en el diseño de las actividades (trabajo de la parte matemática).

Esto resalta la importancia del desarrollo de esta competencia para su práctica docente, pues genera en los futuros profesores un análisis que toma en cuenta el tipo de objetos matemáticos primarios propios del estudio de algún tema en específico, es decir, funcionó como una herramienta que les permitió observar más que simple detalles, aspectos importantes que consideraron para la enseñanza de la variación lineal.

Referencias

Amaya, T., Pino-Fan, L., & Medina, A. (2016). Evaluación del conocimiento de futuros profesores de matemáticas sobre las transformaciones de las representaciones de una función. *Educación Matemática*, *28*(3), 111-144.

Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. Journal of Teacher Education, 51, 241-247.

Bojórquez A., Castillo, J. M., & Jiménez J. R. (2016). *Development of the variational thought in secondary students*. Congreso Internacional en Tecnología y su Integración en la Educación Matemática (TIME) 2016. 29 de junio al 2 de julio de 2016. Austrian Center for Didactics of Computer Algebra (ACDCA) y Facultad de Ciencias de la UNAM. Ciudad de México.

Caballero, M., & Cantoral R. (2015). *Pensamiento y lenguaje variacional: El principio estrella como un mecanismo de construcción social del conocimiento matemático*. CINVESTAV, México.

García, M., y Ledezma, F. R. (S/F). El estudio de la variación, primeras aproximaciones en la educación básica y su efecto en estudiantes de educación superior. *X congreso Nacional de Investigación Educativa*. Recuperado de http://www.comie.org.mx/congreso/memoriaelectronica/v10/pdf/area_tematica_05/ponencias/0586-F.pdf

Godino, J. D. (2009). Categoría de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión: revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 90-113.

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 63-83.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Hernández, S., Fernández, C., & Baptista, L. (2010). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Panorkou, N., Maloney, A., & Confrey, J. (2016). Expressing Covariation and Correspondence relationships in elementary schooling. Recuperado de https://nctm.confex.com/nctm/2014RP/webprogram/ExtendedAbstract/Paper1940/EQX_NCTM_040314%20.pdf

Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *PARADIGMA*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros profesores sobre derivadas. *BOLEMA, 29*(51), 60-89.

SEP. Secretaría de Educación Pública. (2017). *Principales cifras del sistema educativo nacional 2016-2017.* Ciudad de México. SEP. Recuperado de: https://www.planeacion.sep.gob.mx/Doc/estadistica_e_indicadores/principales_cifras/principales_cifras_2016_2017_bolsillo.pdf

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vasco, C. E. (2006). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Cali, Colombia. Recuperado de: http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Wilhelmi, M., Godino, J. D., & Lasa, A. (2014). Significados conflictivos de ecuación y función en estudiantes de profesorado de secundaria. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 573-582). Salamanca: SEIEM.