MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND SKILLS OF UNIVERSITY STUDENTS WHEN SOLVING A MEA

CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL REALIZAR UNA MEA

Iván I. Rodríguez-González	Verónica Vargas-Alejo	Luis E. Montero-Moguel
Universidad de Guadalajara	Universidad de Guadalajara	Universidad de Guadalajara
yelokoscross@gmail.com	vargas.av@gmail.com	montero_hk@yahoo.com.mx

In this paper we present the results of an investigation related to the developing of mathematical knowledge and skills by first semester university students when solving a Model Eliciting Activity [MEA] which involves quadratic function knowledge. This was a qualitative research. The theoretical framework was Models and Modeling Perspective [MMP]. The results show that the students used their mathematical knowledge and skills related to linear and quadratic functions to describe the situation; they moved from a quantitative cycle of understanding (associated with linear and quadratic behaviors), to an algebraic cycle of understanding (associated with quadratic behaviors).

Keywords: Modeling, problem solving, university level.

Learning the concept of function has been studied by several researchers (Gutiérrez and Prieto, 2015; Hernández, 2013; Oviedo, 2013). Why is so important to learn the concept of function? López, Navarro and Fuchs (2018) answer that it is a necessary knowledge to model events and phenomena in different professional areas. Villarraga (2012) describes, for example, the type of situations that can be modelled using the quadratic function such as: optimization problems related to cost, demand, and areas, or physical problems. Despite the importance of understanding the quadratic function, difficulties have been identified in its learning, such as the poor articulation between algebraic and graphic representations (Díaz, Haye, Montenegro and Córdoba, 2013) needed to describe situations and phenomena.

Several authors (Gutiérrez and Prieto, 2015; Hernández, 2013; Oviedo, 2013) have created proposals to address the learning of the quadratic function. However, many of the proposals are reduced to the manipulation of parameters of algebraic expressions and the study of the transformations in the corresponding graph. Little research addresses the development of mathematical knowledge and skills associated with the quadratic function in the context of problem solving or modeling situations close to real life. One of the studies carried out in this direction was that of Aliprantis and Carmona (2003). They used the Models and Modelling Perspective framework (Lesh, 2010) to design and implement an activity to promote the development of knowledge of the quadratic function and associated concepts, such as variables, the relationship among them (quadratic and linear), the product of linear relationships, and the maximization; as well as to encourage students to develop skills for modeling and problem solving, such as conjecture, argument, description, and explanation. The participants in this study were high school students.

The research described in this paper has been carried out with students from the first university semester. The goal was to promote the development of mathematical knowledge and skills associated with the quadratic function during the process of solving situations close to real life. The research question is: What knowledge and skills do first-semester college students exhibit when performing an MEA in which the concept of quadratic function underlies?

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Theoretical Framework

Learning mathematics, according to MMP (Lesh and Doerr, 2003), is based on the construction of models, which

> are conceptual systems (consisting of elements, relations, operations, and rules governing interactions) that are expressed using external notation systems, and that are used to construct, describe, or explain the behaviors of other system(s)—perhaps so that the other system can be manipulated or predicted intelligently. (Lesh and Doerr, 2003, p. 10).

These models can be internal and external, that is, they inhabit both the thinking of students and the equations, schemes, computer applications or other representational resources used by science experts or schoolchildren (Lesh and Doerr, 2003). Models can be created by carrying out Model Eliciting Activities (MEAs), which are simulations of "real life" situations. In carrying out MEAs, students go through iterative sequences where they express, test, and revise their own ways of thinking (Lesh and Caylor, 2007). During the knowledge development process students build and modify their models through the phases of differentiation and refinement of the conceptual systems they construct (Lesh and Doerr, 2003).

MEAs "involve sharable, manipulatable, modifiable, and reusable conceptual tools (e.g., models) for constructing, describing, explaining, manipulating, predicting, or controlling mathematically significant systems" (Lesh and Doerr, 2003, p. 3). Researchers mention that such descriptions, explanations, and constructions should not be considered as simple processes that students create to get 'the answer', but they are key elements in the learning process. Thus, the process is the product.

MEAs "involve mathematizing—by quantifying, dimensionalizing, coordinatizing, categorizing, algebratizing, and systematizing relevant objects, relationships, actions, patterns, and regularities" (Lesh and Doerr, 2003, p. 5). One feature that distinguishes MEAs from other problem-solving activities is the writing of a letter. In the letter, students must explain the method they used to find the solution to the problem; this method can be used by a client to solve other problems with similar characteristics.

Methodology

The methodology was qualitative. The MEA (Figure 1) whose results are described in this paper, is part of a didactical sequence (Lesh, Cramer, Doerr, Post and Zawojewski, 2003) designed during the research project. It was implemented in a two-hour session with a group of 12 undergraduate students, who were 18 years old. Students were organized in four teams of three members each. The participants had a laptop and Excel and GeoGebra software. The process of solving the problem was carried out in four phases. 1) students read an informative article related to the context of the problem (warm-up activity according to the MMP). 2) they read the problem (Figure 1) and worked as a team to solve it. 3) They presented their results in a plenary discussion. 4) Students solved the problem individually at home. In this paper, the results of the phase 2 are presented, based on the discussions generated during the plenary (phase 3). The data were obtained from the worksheets, Word, Excel and GeoGebra files, and from video recordings of the face-to-face session. The concepts associated with this activity are those mentioned before (Aliprantis and Carmona, 2003).

Students in the last semester of Mechanical Electrical Engineering at the University of Guadalajara's Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) want to organize a trip to the Mazamitla Cabins to raise funds to celebrate their graduation.

For this purpose, the University will lend them a bus with capacity for 49 passengers, so that the cost of the round trip from CUCEI (diesel and driver's fees) and the tours inside the magic town will be covered. In addition, Carlos, a partner of the students, has taken on the task of searching on the Internet for accommodation and activities in order to organize a tourist package and be able to offer a complete experience to the travelers who attend the tour.

The tourist package includes: accommodation for three days and two nights in a cozy cabin located in La Cañada; a tour of the Sierra del Tigre, with a guide; ice cream factory and tasting of typical products; a ride on a four-wheel-drive vehicle through the most striking places in the sierra. Also, for those who like adrenaline, the zipline, climbing wall, hanging bridges and gotcha are included.

Carlos budgeted the cost of $1300.00 for each tour package per traveler. But, in order to make a profit, he will offer it at a price of $3650.00. To encourage potential travelers, Carlos proposes to make a discount of $50 for each person who goes, except if only one goes. That is, if two people go, they get a $50 discount; if there are three, there is a $100 discount per passenger.

Help Carlos. Write him a letter explaining whether and how much organizing the trip will allow him to make a profit. Support your statements with clear and valid arguments.

Figure 1: MEA

Data analysis was based on two criteria: quantitative and algebraic cycles of understanding (Vargas, Reyes & Cristóbal, 2016). The quantitative cycle of understanding is one in which students are able to describe the variables and relations among them in a numerical way. The information and relationships can be organized in tables and graphs. In the Algebraic cycle of understanding, students exhibit some mastery of the language of algebra to solve the problem. Those who reach this last cycle have gone through different stages of differentiation, integration, and refinement of their conceptual systems and have a deeper domain of the representations. During each of the cycles, verbal representation was present to justify the conjectures and explanations.

Results

Students went through two cycles of understanding (Table 1). The first cycle was quantitative and the second one was algebraic. At the beginning, four teams (100% of the total) revealed a way of thinking related to linear variation (column 2, Table 1) during the quantitative cycle. Then, students from teams 1, 2 and 3 (75% of teams) moved from their procedures characterized by linear to a quadratic variation (column 3, Table 1). Only the members of the teams 1 and 2 extended their ways of thinking into an algebraic cycle of understanding. A detailed description is shown below.

Table 1: Student's cycles of understanding to solve the MEA

	Cycle of understanding			Result	
	Quantitative		Algebraic	Correct	Incorrect
	Linear	Quadratic	Quadratic		
E1	✓	✓	✓		✓
E2	✓	✓	✓	✓	
E3	✓	✓		✓	
E4	✓				✓

First Cycle of Understanding: Quantitative

All the students identified the data: capacity of the bus, cost of the journey, initial price, and the discount. They also realized that they needed to write a letter that included the procedure for solving the problem. Two ways of addressing the situation in this cycle were distinguished: linear and quadratic behavior.

Linear behaviour. All the students calculated the value of the profit corresponding to the maximum number of passengers, i.e. 49 persons. Students' conjecture was that the more passengers, the greater profit, which denotes linear thinking. Two procedures were distinguished, one in which the profit per passenger was obtained, exhibited by teams 1, 2 and 3, and another in which the profit per group was obtained, realized by team 4. The procedures are discussed below.

Procedure to obtain the profit when 49 passengers travel (maximum capacity of the bus)

Procedure: profit per passenger. The procedure of the teams 1, 2 and 3 (75% of teams) was to subtract the corresponding discount for 49 passengers from the initial price, i.e. they carried out the operation: 3650-2400. The result (1250) was reduced by the cost of the trip, i.e. 1250-1300. Students interpreted this quantity (-50) as the profit per passenger. However, because the amount was negative, they expressed that it was a loss of $50 per person. Thus, $2450 would be the loss corresponding to the trip of 49 passengers, as shown in Figure 2.

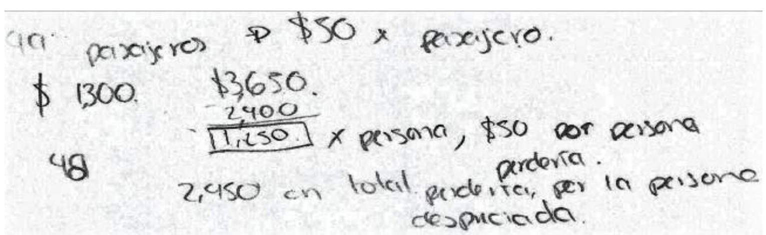


Figure 2: Operations carried out by Team 1 to obtain the Profit related to 49 Passengers. Procedure: Profit per passenger

Procedure to obtain the profit corresponding to 49 passengers (maximum capacity of the bus). Procedure: profit per group. Students of team 4 used the spreadsheet to operate with the cost of the trip, the maximum passenger capacity and the initial price, i.e., $1300, 49, and $3650, respectively (cells D6, E6 and D10 in Figure 3). They related these data using formulas (Table 2) to calculate the discount, the expenditure, the income related to the initial price, the income related to the discounted price, and the profit corresponding 49 passengers.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	50						
2	3	100		SUMATORIA DE LOS DESCUENTOS				
3	4	150			117600			
4	5	200						
5	6	250		PRECIO TOTAL DEL VIAJE				
6	7	300		$1,300	49			
7	8	350			63700			
8	9	400						
9	10	450		COBRO TOTAL		178850		
10	11	500		$3,650	61250			
11	12	550						
12	13	600						
13	14	650		GANANCIAS TOTALES				
14	15	700			-2450	COMO PODEMOS OBSERVAR ES UNA		
15	16	750				CANTIDAD NEGATIVA, POR TANTO SE		
16	17	800				PERDERIA ESE DINERO		

Figure 3: Procedure to obtain the profit corresponding to 49 Passengers by Team 4. Procedure: profit per group

Table 2: Formulas Used by Team 4

Cell	Formula
E3	=(B48*A48)
E7	=(D6*E6)
E10	=(D10*E6)-E3
E14	=(E10-E7)
F9	=(D10*E6)

Quadratic behavior. The members of teams 1, 2 and 3 (75% of the teams) made several operations using different amounts of passengers and analyzed how the results varied. Students from teams 1 and 2 (50%) used trial and error procedure, in a disorganized way. Students from team 3 (25%) performed a systematized procedure. Team 4 (25%) was the only team that did not perform many operations.

Trial and error procedure. Students from teams 1 and 2 (50% of the total) performed operations with different quantities of passengers. This allowed the students from team 1 to identify how income varied and to find out for what quantity of passengers a maximum income was produced (Figure 4). In turn, the students from team 2 identified in a more organized way how the profit varied and found the quantity of passengers that corresponded to the maximum profit.

Figure 4 shows the procedure developed by the team 1, as a representative example of the teams 1 and 2 procedures. Students calculated the income corresponding to 24, 28, 37, 36 and 38 passengers. However, they believed that they were finding the profit. They noted that there was a dependency relationship involving the number of passengers; they expressed that "the profit depends on the passengers".

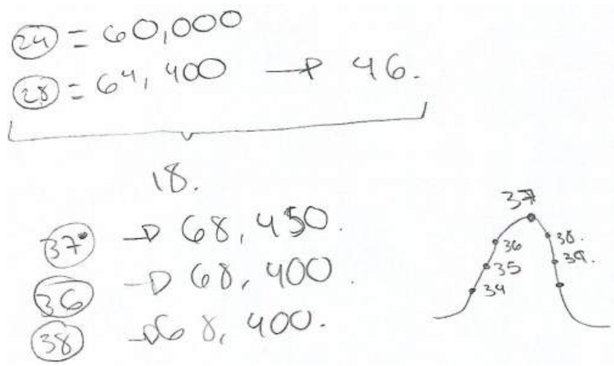
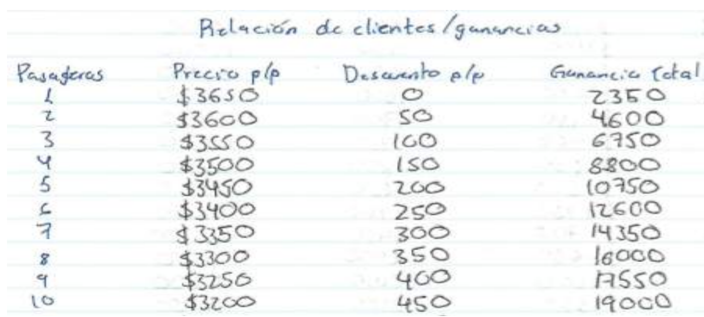


Figure 4: Procedure to obtain the Income and to analyze the Variation for Different Amounts of Passengers by the Team 1

Figure 4 shows how students made a graph that describes the way in which the income varies. Students noticed that an "income maximum value" or "peak" was obtained when they made operations with 37 passengers. They did not identify an interval where the function was increasing or decreasing. They pointed out that, from the maximum value (37), the income corresponding to 36 and 38 passengers "goes down the same", in the same way they mentioned that "35 and 39 have the same [corresponding income value]".

Exploration of results by systematized test. Students from team 3 constructed a table (Figure 5) with the labels: "Passengers", "Price per passenger", "Discount per passenger" and "Total Profit". They related the amounts of each row in a horizontal way, and obtained the profit, according to the quantity of passengers. They identified that the maximum profit, $28800, is obtained when 24 passengers are traveling. Figure 5 shows part of the table created by team 3.



Relación de clientes/ganancias

Pasajeros	Precio p/p	Descuento p/p	Ganancia total
1	$3650	0	2350
2	$3600	50	4600
3	$3550	100	6750
4	$3500	150	8800
5	$3450	200	10750
6	$3400	250	12600
7	$3350	300	14350
8	$3300	350	16000
9	$3250	400	17550
10	$3200	450	19000

Figure 5: Team 3 Procedure (passengers, price per person, discount per person, total profit)

Algebraic Cycle of Understanding

Students of teams 1 and 2 (50% of teams) generalized patterns. Students from team 3 (25% of the total) constructed syncopated expressions to perform the calculation. Students from team 4 (25%) did not generalize.

Generalization of patterns through algebraic expression. Figure 6 shows the expression obtained by the students of team 1 to calculate the profit. It is not identified as a function by the students, but as a formula. The quantities 3650 and 50 represent the initial price and the discount per person, respectively. The value 63700 is the result of multiplying 1300*49, that is, the cost per person multiplied by 49. Therefore, 63700 is the expenditure when attending the maximum passenger capacity.

The corresponding expenditure of n passengers would be $1300n$. The correct expression was $(3650-(n-1)*50)n-1300n)$. The algebraic model that the students had to construct to calculate the profit was $f(x)=-50x^2+2400x$, in its simplest form, where x represents the number of assistants.

(3650- (n-1)*50)n-63700

*Sea "n" el número de personas que asistan

Figure 6: Algebraic Expression of Team 1 for Calculating the profit

These students used the GeoGebra software to identify the number of passengers corresponding to the maximum profit. They found that 37 passengers were needed to produce a maximum value of 4750 (Figure 7). However, according to the problem data, the correct values were 24 passengers and $28800.

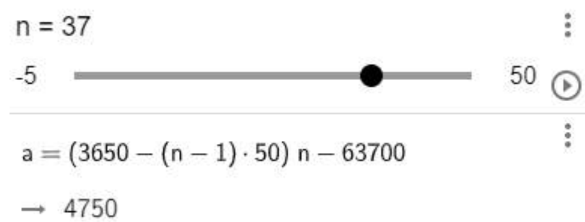


Figure 7: Team 1 procedure to obtain the maximum profit.

Generalization of patterns in a syncopated way. Students from team 3 (25% in the group) generalized their procedure relationships through natural language and mathematical symbols (Figure 8).

Número de personas -1 x 50 = Descuento por persona

Precio base (3650) - Descuento - Costo (1300) = Ganancia por persona

Ganancia por persona x N de personas = Ganancia total

Figure 8: Generalization of Patterns to obtain the profit by Team 3.

Plenary Discussion

During the plenary session the students presented their letters and discussed their results. Students from team 4, based on their letter, showed how they calculated the profit. They were challenged by the rest of the teams with questions such as "What if there were 10", "How many would have to attend so that I could earn a lot of money". Students from teams 2 and 3 mentioned that 24 passengers were needed to get a maximum profit of $28800. In the letters they wrote this result, however, they did not explain the method they used to find the solution so they did not develop a shareable and reusable model (Lesh and Doerr, 2003). Students from team 1 told their classmates that they "discovered a formula by trial and error". They wrote in the letter the quantities corresponding to the maximum profit (according to their expression), as well as the expression itself. In other words, they not only mentioned how many passengers were needed to obtain a maximum profit, but also presented the client with a shareable and reusable tool with which they could know the profit for any number of passengers. However, they also did not explain how they found their procedure.

Conclusions

What knowledge and skills do first-semester college students exhibit when performing an MEA in which the concept of quadratic function underlies? Students exhibited the knowledge mentioned by Aliprantis and Carmona (2003): variable recognition, variation, linear relation and quadratic relation, maximum. They were able to identify the data of the problem and relate them to obtain new data. The relationships were expressed verbally and in writing, through operations on paper and formulas in Excel. Regarding mathematical skills, they used trial and error procedures, and built tables and graphs to analyze the variation of quantities. They identified a maximum value denoted as "peak", "mountain" or "bell curve" in the graphical form as the maximum profit. Students were able to generate conjectures (associate profit with linear behavior), describe and explain the situation, and finally, evaluate their conjectures. The results showed how the students were able to identify patterns, generalize and express them in a rhetorical and symbolic way, and use the GeoGebra CAS system to find answers.

One aspect that is emphasized in the MMP is letter and, therefore, model building. Although students obtained solutions, it was difficult for them to describe the procedures they used to arrive at their answers, as well as to develop general procedures that would be useful for similar situations. Considering the process as the product was not easy, as it involved giving importance to the process of mathematization. Students are used to giving unique and accurate answers, and this is what happened when they carried out the MEA.

One thing that stands out in this study is that before students associated quadratic behavior to the situation, they associated linear behavior. In other words, the activity presented in this paper has the potential to give students elements to characterize each type of function and, based on the context, discuss the differences between linear and quadratic behaviors.

Acknowledgment

The research reported in this paper had the support of CONACYT scholarship for graduate programs and Campus Viviente project (http://campusviviente.org). Any opinions, findings, and conclusions expressed in this article are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the Campus Viviente project.

References

Aliprantis, C. D., & Carmona, G. (2003). Introduction to an Economic Problem: A Models and Modeling Perspective. In R. Lesh, & H. M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 255-264). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, República Dominicana.* Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/4072/

Gutiérrez, R. E., & Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *88*, 115-126. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/6578/

Hernández, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números, 82*, 115-129. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Enlared_01.pdf

Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means

to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.
Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewsky, J. S. (2003). Model development sequences. In R. Lesh, & H. M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching (pp. 35-58).* United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
Lesh, R., & Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of computers for mathematical Learning*, *12*(3), 173-194.
Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
López, F. J., Navarro, Y., & Fuchs, O. L. (2018). Realidad aumentada como andamiaje para la comprensión del concepto de función y gráfica lineal y cuadrática en tercer año de educación en el nivel medio superior de la BUAP. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *4*, 244-247. Retrieved from http://revistaiime.org/index.php/IIME/issue/view/8
Oviedo, N. (2013). Enseñanza y aprendizaje de Ecuación Cuadrática con apoyo Geogebra. *Actas del VII CIBEM* Retrieved from http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/810.pdf
Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A. V. & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. Educación Matemática, 28(2), 59-84
Villarraga, S. P. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación* (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia). Retrieved from de http://www.bdigital.unal.edu.co/9004/

CONOCIMIENTOS Y HABILIDADES MATEMÁTICAS DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL REALIZAR UNA MEA

MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND SKILLS OF UNIVERSITY STUDENTS WHEN SOLVING A MEA

Iván I. Rodríguez-González	Verónica Vargas-Alejo	Luis E. Montero-Moguel
Universidad de Guadalajara	Universidad de Guadalajara	Universidad de Guadalajara
yelokoscross@gmail.com	vargas.av@gmail.com	montero_hk@yahoo.com.mx

En este documento se presentan los resultados de una investigación relacionada con el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas por estudiantes universitarios de primer semestre al resolver Actividades Provocadoras de Modelos [MEA] que implican conocimiento acerca de la función cuadrática. La investigación fue de tipo cualitativa. El marco teórico fue la Perspectiva de Modelos y Modelación [PMM]. Los resultados muestran que los estudiantes utilizaron sus conocimientos y habilidades matemáticas relacionadas con la función lineal y cuadrática para describir la situación; transitaron de un ciclo de entendimiento caracterizado por procedimientos cuantitativos (en el que asociaron comportamientos lineales y cuadráticos a la situación), a un ciclo de entendimiento algebraico (en el que asociaron comportamientos únicamente cuadráticos).

Palabras clave: modelación, resolución de problemas, matemáticas de nivel universitario.

El aprendizaje del concepto de función ha sido objeto de estudio en diversas investigaciones (Gutiérrez y Prieto, 2015; Hernández, 2013; Oviedo, 2013). ¿Por qué es importante aprender el concepto de función? López, Navarro y Fuchs (2018) responden que es un conocimiento necesario para modelar sucesos y fenómenos en distintas áreas profesionales. Villarraga (2012) da cuenta, por ejemplo, del tipo de situaciones que pueden ser modeladas mediante la función cuadrática como: circunstancias de optimización relacionadas con costo, demanda y áreas, o en problemas físicos como intensidad de iluminación sobre una superficie. Pese a la importancia de comprender la función cuadrática, se ha identificado que existen dificultades en su aprendizaje, como la escasa articulación entre las representaciones algebraica y gráfica (Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba, 2013) necesaria para describir situaciones y fenómenos.

Diversos autores (Gutiérrez y Prieto, 2015; Hernández, 2013 y Oviedo, 2013) han creado propuestas para atender el aprendizaje de la función cuadrática. Sin embargo, muchas se reducen a la manipulación de parámetros de la expresión algebraica para estudiar transformaciones en la gráfica correspondiente. Son escasas las investigaciones en las que se atiende el desarrollo de conocimientos y habilidades matemáticas asociadas a la función cuadrática en el contexto de la resolución de problemas o modelación de situaciones cercanas a la vida real. Una de las investigaciones realizadas en esta dirección fue la de Aliprantis y Carmona (2003), quienes en el marco de la Perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2010) diseñaron e implementaron una actividad para promover el desarrollo del conocimiento de la función cuadrática y conceptos asociados como el reconocimiento de variables, relación entre ellas (cuadráticas y lineales), producto de relaciones lineales y maximización, así como para propiciar en los estudiantes el desarrollo de habilidades para la modelación y solución de problemas, como conjeturar, argumentar, describir y explicar. Los participantes en estudio fueron estudiantes de secundaria.

La investigación descrita en este artículo se llevó a cabo con estudiantes del primer semestre universitario. El objetivo fue propiciar el desarrollo de conocimiento y habilidades matemáticas asociadas a la función cuadrática durante el proceso de resolución de problemas cercanos a la vida real. La pregunta de investigación es: ¿Qué conocimientos y habilidades exhiben estudiantes universitarios de primer semestre al resolver un problema en el que subyace el concepto de función cuadrática?

Marco Teórico

Aprender matemáticas, de acuerdo con la PMM (Lesh y Doerr, 2003), se basa en la construcción de modelos, los cuales

> son sistemas conceptuales (que consisten de elementos, relaciones, operaciones y reglas que rigen interacciones) que son expresados al usar sistemas de notación externa y que son utilizados para construir, describir o explicar los comportamientos de otros sistemas –quizá de manera que el otro sistema pueda ser manipulado o predicho inteligentemente. (Lesh y Doerr, 2003, p. 10).

Estos modelos pueden ser internos y externos, es decir, habitan tanto en el pensamiento de los estudiantes como en las ecuaciones, esquemas, aplicaciones computacionales u otros recursos de representación que utilizan expertos en ciencia o bien escolares (Lesh y Doerr, 2003). Los modelos pueden ser creados al realizar Actividades Provocadoras de Modelos (MEA), las cuales son simulaciones de situaciones de la "vida real". Al realizar las MEA los estudiantes pasan por secuencias iterativas donde expresan, prueban y revisan sus propias formas de pensamiento (Lesh y Caylor, 2007). Durante el proceso de desarrollo de conocimiento, los estudiantes construyen y modifican sus modelos mediante las fases de diferenciación y refinamiento de los sistemas conceptuales que construyen (Lesh y Doerr, 2003).

Las MEA implican el uso de "herramientas conceptuales que son compartibles, manipulables, modificables y reutilizables (por ejemplo, modelos) para construir, describir, explicar, manipular, predecir, o controlar matemáticamente sistemas significativos" (Lesh y Doerr, 2003, p. 3). Los investigadores mencionan que tales descripciones, explicaciones y construcciones no deben ser consideradas como simples procesos que los estudiantes crean para conseguir "la respuesta", sino que son elementos clave en el proceso de aprendizaje. De manera que, el proceso es el producto.

Las MEA "usualmente involucran la matematización, es decir, cuantificar, dimensionar, coordinar, categorizar, algebrizar y sistematizar objetos relevantes, relaciones, acciones, patrones y regularidades" (Lesh y Doerr, 2003, p. 5). Una característica que distingue a las MEA de otras actividades de resolución de problemas es la escritura de una carta. En ella los estudiantes deben explicar el método que utilizaron para encontrar la solución del problema; este método puede ser utilizado por un cliente para resolver otros problemas de características similares.

Metodología

La metodología que se siguió en esta investigación fue de tipo cualitativa. La MEA (Figura 1) cuyos resultados se describen en este documento, forma parte de una secuencia didáctica (Lesh, Cramer, Doerr, Post y Zawojewski, 2003) diseñada durante el proyecto de investigación. Fue implementada con un grupo de 12 estudiantes universitarios de nuevo ingreso, de aproximadamente 18 años, en una sesión de dos horas. Los estudiantes trabajaron en cuatro equipos de tres integrantes cada uno. Cada participante tenía una laptop con la MEA, Excel y GeoGebra. El proceso de resolución del problema se llevó a cabo en cuatro fases. 1) los estudiantes leyeron un artículo informativo relacionado al contexto del problema (actividad de calentamiento de acuerdo con la PMM). 2) leyeron el problema (ver Figura 1) y trabajaron en equipo en la resolución de éste. 3) expusieron sus soluciones en una discusión plenaria. 4) los estudiantes resolvieron el problema de manera individual en casa. En este documento solo se presentan los resultados de la fase 2, sustentados en las discusiones generadas durante la plenaria (fase 3). Los datos del estudio se obtuvieron del trabajo hecho por los estudiantes (hojas escritas); archivos de Word, Excel o GeoGebra; y de videograbaciones de la sesión presencial. Los conceptos asociados a esta actividad son los mencionados en la introducción (Aliprantis y Carmona, 2003).

Los estudiantes del último semestre de Ingeniería Mecánica Eléctrica del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, quieren organizar un paseo a las cabañas de Mazamitla con el fin de recaudar fondos para celebrar su graduación.

Para tal propósito, la Universidad ha puesto a su disposición un autobús con capacidad para 49 pasajeros, de manera que quede cubierto el costo del recorrido ida y vuelta desde las instalaciones del CUCEI (diesel y pago al chofer), así como los traslados dentro del pueblo mágico. Además, Carlos, compañero de los estudiantes, se ha dado a la tarea de buscar en internet alojamiento y actividades para formar un paquete y poder ofrecer una experiencia completa a los viajeros que asistan al paseo.

El paquete turístico incluye el hospedaje para tres días y dos noches en una acogedora cabaña situada en La Cañada; un tour por la Sierra del Tigre, con guía, hielera y degustación de productos típicos; un paseo en cuatrimoto en el que se recorren los lugares más llamativos de la sierra. También, para aquellos que gustan de la adrenalina, se incluye tirolesa, muro de escalar, puentes colgantes y gotcha.

Carlos presupuestó el costo de $1 300.00 para cada paquete turístico por viajero, pero con el fin de obtener una ganancia, lo ofrecerá a un precio de $3650.00. Para animar a los posibles viajeros, Carlos propone hacer un descuento de $50 por cada persona que vaya, excepto si sólo va una. Es decir, si van dos personas, éstas reciben un descuento de $50; si son 3, se hace un descuento de $100 a cada una de ellas.

Ayuda a Carlos. Escríbele una carta en la que le expliques si su propuesta de organizar la excursión les permitirá obtener ganancias, y de qué monto. Sustenta tus afirmaciones con argumentos claros y válidos.

Figura 1: MEA

El análisis de datos se realizó con base en los ciclos de entendimiento cuantitativo y algebraico (Vargas, Reyes & Cristóbal, 2016). El ciclo de entendimiento cuantitativo es aquel en el que los estudiantes son capaces de describir de manera numérica las variables involucradas en el problema.

La información y las relaciones pueden ser organizadas en tablas y gráficas. En el ciclo de entendimiento algebraico los estudiantes exhiben cierto dominio del lenguaje del álgebra para solucionar el problema. Quienes alcanzan este ciclo han transitado por distintas etapas de diferenciación, integración y refinamiento de sus distintos sistemas conceptuales y tienen un dominio superior en el manejo de las representaciones. Durante cada uno de los ciclos, la representación verbal estuvo presente para justificar las conjeturas y las explicaciones de los estudiantes.

Resultados

Los estudiantes transitaran por dos ciclos de entendimiento (Tabla 1). El primero fue cuantitativo y el segundo algebraico. Inicialmente, los cuatro equipos (100% del total) revelaron una forma de pensar relacionada con la variación lineal (columna 2, Tabla 1) durante el ciclo cuantitativo. Enseguida, los alumnos de los equipos 1, 2 y 3 (75% de equipos) transitaron de sus procedimientos caracterizados por la variación lineal a una de tipo cuadrática (columna 3, Tabla 1); sin embargo, el equipo 4 no lo logró. Solamente los integrantes de los equipos 1 y 2 extendieron sus ideas a un ciclo de entendimiento algebraico. Una descripción en detalle se muestra enseguida.

Tabla 1: Ciclos de entendimiento de los estudiantes al resolver la MEA

	Ciclos de entendimiento			Respuesta	
	Cuantitativo		Algebraico	Correcta	Incorrecta
	Lineal	Cuadrático	Cuadrático		
E1	✓	✓	✓		✓
E2	✓	✓	✓	✓	
E3	✓	✓		✓	
E4	✓				✓

Primer Ciclo de Entendimiento: Cuantitativo

Todos los estudiantes identificaron los datos del problema: capacidad del camión, costo del viaje, precio inicial y el descuento. También, se percataron que tenían que elaborar una carta en la que desarrollaran un procedimiento para solucionar el problema. Se distinguieron dos formas de abordar la situación en este ciclo, porque algunos equipos la asociaron a un comportamiento lineal y otros a uno cuadrático.

Comportamiento lineal. Los integrantes de los cuatro equipos (100% de los equipos) calcularon el valor de la ganancia correspondiente a la cantidad máxima de pasajeros, es decir, 49 personas. La conjetura de los estudiantes fue que, a mayor cantidad de pasajeros, mayor ganancia, lo que denota un pensamiento lineal. Se distinguieron dos procedimientos, uno en el que se obtuvo la ganancia por pasajero, exhibido por los equipos 1, 2 y 3; y otro en el que se obtuvo la ganancia por grupo, elaborado por el equipo 4. Enseguida se discuten los procedimientos.

Procedimiento para obtener la ganancia para 49 pasajeros (capacidad máxima del camión). Método: ganancia por pasajero. El procedimiento de los equipos 1, 2 y 3 (75% de equipos) consistió en sustraer al precio inicial el descuento correspondiente por 49 pasajeros, es decir, efectuaron la operación: 3650-2400. Al resultado (1250) le restaron el costo del viaje, o sea, 1250-1300. Los estudiantes interpretaron esta cantidad (-50) como la ganancia por pasajero. No obstante, debido a la naturaleza negativa, expresaron que se trataba de una pérdida, en este caso de $50 por persona. De esta manera, la pérdida por 49 pasajeros era de $2450, como se muestra en la Figura 2.

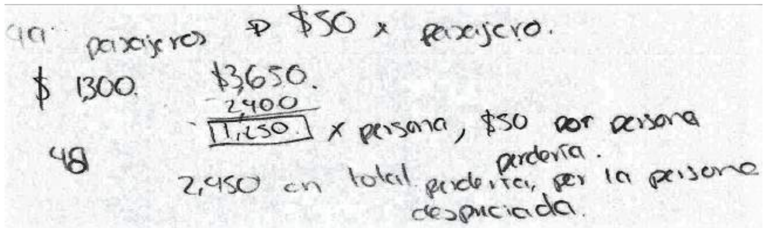


Figura 2: Operaciones llevadas a cabo por el equipo 1 para obtener la Ganancia relacionada a 49 Pasajeros por el Equipo 1. Método: Ganancia por Pasajero

Procedimiento para obtener la ganancia correspondiente a 49 pasajeros (capacidad máxima del camión). Método: ganancia por grupo. Los estudiantes del equipo 4 utilizaron la hoja de cálculo para operar con el costo del viaje por pasajero, la capacidad máxima de pasajeros y el precio inicial del paquete, es decir, \$1300, 49 y \$3650, respectivamente (celdas D6, E6 y D10 en la Figura 3). Relacionaron estos datos mediante fórmulas (Tabla 2) para calcular el descuento, el egreso, el ingreso relacionado con el precio inicial, el ingreso relacionado con el precio con descuento y la ganancia correspondiente a 49 pasajeros.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	50						
2	3	100		SUMATORIA DE LOS DESCUENTOS				
3	4	150			117600			
4	5	200						
5	6	250		PRECIO TOTAL DEL VIAJE				
6	7	300		$1,300	49			
7	8	350			63700			
8	9	400						
9	10	450		COBRO TOTAL		178850		
10	11	500		$3,650	61250			
11	12	550						
12	13	600						
13	14	650		GANANCIAS TOTALES				
14	15	700			-2450	COMO PODEMOS OBSERVAR ES UNA		
15	16	750				CANTIDAD NEGATIVA, POR TANTO SE		
16	17	800				PERDERIA ESE DINERO		

Figura 3: Procedimiento para obtener la Ganancia correspondiente a 49 Pasajeros por el Equipo 4. Método: Ganancia por Grupo

Tabla 2: Fórmulas Utilizadas por el Equipo 4

Celda	Fórmula
E3	=(B48*A48)
E7	=(D6*E6)
E10	=(D10*E6)-E3
E14	=(E10-E7)
F9	=(D10*E6)

Comportamiento cuadrático. Los integrantes de los equipos 1, 2 y 3 (75% de los equipos) hicieron varias operaciones, usaron diferentes cantidades de pasajeros y analizaron cómo variaban los resultados. Los estudiantes de los equipos 1 y 2 (50%) recurrieron al ensayo y error, de manera desordenada. Los estudiantes del equipo 3 (25%) exhibieron un procedimiento sistematizado. El equipo 4 (25%) fue el único que no realizó varias operaciones.

Procedimiento de ensayo y error. Los estudiantes de los equipos 1 y 2 (50% del total) realizaron operaciones con cantidades distintas de pasajeros. Esto permitió que los integrantes del equipo 1 identificaran la forma en cómo variaba el ingreso y encontraran para qué cantidad de pasajeros se producía un ingreso máximo (Figura 4). Por su parte, los alumnos del equipo 2 identificaron de manera más organizada cómo variaba la ganancia y encontraron la cantidad de pasajeros que correspondía a la ganancia máxima.

En la Figura 4 se muestra el procedimiento elaborado por el equipo 1, como ejemplo representativo del trabajo de los equipos 1 y 2. Los estudiantes calcularon el ingreso que se generaba si viajaban 24, 28, 37, 36 y 38 pasajeros. No obstante, creían que habían obtenido la ganancia. Observaron que existía una relación de dependencia en la que estaba involucrada la cantidad de pasajeros; expresaron que "la ganancia depende de las personas que vayan [pasajeros]".

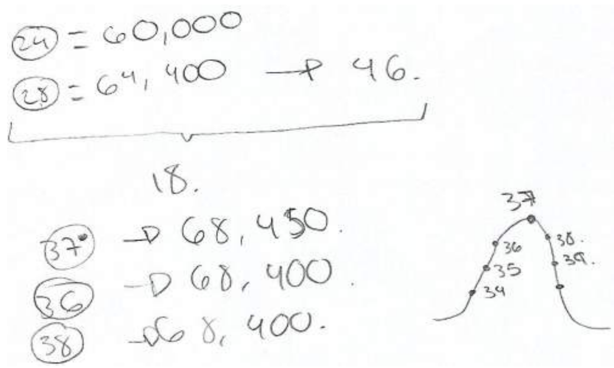


Figura 4: Procedimiento para obtener el Ingreso y para analizar la Variación para Distintas Cantidades de Pasajeros por el Equipo 1

En la misma Figura 4 se observa el bosquejo de una gráfica que describe la forma en cómo varía el ingreso. Los estudiantes notaron que se obtenía un ingreso "máximo" o "cúspide" para 37 pasajeros. No identificaron un intervalo de crecimiento o decrecimiento. Señalaron que, a partir del valor máximo, los ingresos correspondientes a 36 y 38 pasajeros "van bajando igual", del mismo modo mencionaron que "35 y 39 tienen el mismo [correspondiente valor de ingreso]".

Exploración de resultados por ensayo sistematizado. Los estudiantes del equipo 3 construyeron una tabla (Figura 5) con los rótulos: "Pasajeros", "Precio p/p", "Descuento p/p" y "Ganancia Total". Relacionaron las cantidades de cada fila de manera horizontal, y obtuvieron la ganancia, según la cantidad de pasajeros. Identificaron que la ganancia máxima, $28800, se obtiene cuando viajan 24 pasajeros. En la Figura 5 se muestra parte de la tabla creada por el equipo 3.

Relación de clientes/ganancias

Pasajeros	Precio p/p	Descuento p/p	Ganancia Total
1	$3650	0	2350
2	$3600	50	4600
3	$3550	100	6750
4	$3500	150	8800
5	$3450	200	10750
6	$3400	250	12600
7	$3350	300	14350
8	$3300	350	16000
9	$3250	400	17550
10	$3200	450	19000

Figura 5: Procedimiento del Equipo 3

Ciclo de Entendimiento Algebraico

Los estudiantes de los equipos 1 y 2 (50% de equipos) generalizaron patrones. Por su parte, los estudiantes del equipo 3 (25% del total) construyeron expresiones sincopadas para realizar el cálculo. Los estudiantes del equipo 4 (25%) no presentaron generalizaciones.

Generalización de patrones mediante expresión algebraica. En la Figura 6 se muestra la expresión obtenida por los estudiantes del equipo 1 para calcular la ganancia. No es identificada como función por los estudiantes, sino como una fórmula. Las cantidades 3650 y 50 representan el precio inicial del paquete y el descuento por pasajero, respectivamente. El valor 63700 es el resultado de multiplicar 1300*49, es decir, el costo del paquete por pasajero por 49 pasajeros. De manera que 63700 es el egreso cuando asiste la capacidad máxima de viajeros.

El egreso correspondiente a n pasajeros sería $1300n$. La expresión correcta era $(3650-(n-1)*50)n-1300n$. El modelo algebraico que los estudiantes debían construir para calcular la ganancia era $f(x)=-50x^2+2400x$ en su forma simplificada, donde x representa la cantidad de asistentes.

(3650- (n-1)*50)n-63700

*Sea "n" el número de personas que asistan

Figura 6: Expresión Algebraica del Equipo 1 para Calcular la Ganancia

Estos estudiantes emplearon el software GeoGebra para identificar la cantidad de pasajeros con la que se producía la ganancia máxima. Encontraron que eran necesarios 37 pasajeros para producir un valor máximo de 4750 (Figura 7). Sin embargo, de acuerdo con los datos del problema, los valores correctos eran 24 pasajeros y $28 800.

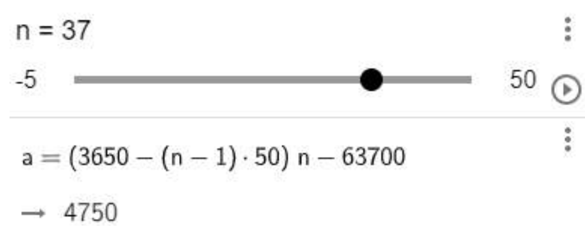


Figura 7: Procedimiento del equipo 1 para obtener la Ganancia Máxima

Generalización de patrones de manera sincopada. Los estudiantes del equipo 3 (25% en el grupo) generalizaron su procedimiento mediante lenguaje natural y símbolos matemáticos (Figura 8).

Número de personas -1 x50 = Descuento por persona

Precio base(3650) -Descuento- Costo(1300) = Ganancia por persona

Ganancia por persona x N de personas = Ganancia total

Figura 8: Generalización de Patrones para el Cálculo de la ganancia por el Equipo 3.

Discusión Plenaria

Durante la plenaria los estudiantes expusieron sus cartas y discutieron sus resultados. Los integrantes del equipo 4, con base en su carta, mostraron cómo calcularon la ganancia. Fueron cuestionados por el resto de los equipos con preguntas como "¿Qué pasa si van 10?", "¿Cuántos tendrían que asistir para que pudiera ganar mucho dinero?". Los alumnos de los equipos 2 y 3 mencionaron que eran necesarias 24 personas para obtener una ganancia máxima igual a $28800. En sus cartas escribieron este resultado, sin embargo, no explicaron el método que utilizaron para encontrar la solución por lo que no elaboraron un modelo compartible y reutilizable (Lesh y Doerr, 2003). Los estudiantes del equipo 1 comunicaron a sus compañeros que "descubrieron una fórmula al tanteo". Mostraron en su carta las cantidades correspondientes a la ganancia máxima (de acuerdo con su expresión), así como la expresión misma. Es decir, no sólo mencionaron qué cantidad de pasajeros eran necesarios para obtener una ganancia máxima, sino que presentaron al usuario una herramienta compartible y reutilizable con la que podrían conocer las ganancias para cualquier cantidad de pasajeros. No obstante, tampoco explicaron cómo encontraron su procedimiento.

Conclusiones

¿Qué conocimientos y habilidades exhiben estudiantes universitarios de primer semestre al resolver un problema en el que subyace el concepto de función cuadrática? Los estudiantes exhibieron los conocimientos mencionados por Aliprantis y Carmona (2003): reconocimiento de variables, variación, relación lineal y relación cuadrática, máximo. Fueron capaces de identificar los datos del problema y relacionarlos para obtener nuevos datos. Las relaciones las expresaron de manera verbal y escrita, mediante operaciones en papel y fórmulas en Excel. Respecto a las habilidades matemáticas, emplearon procedimientos de ensayo y error, y construyeron tablas y gráficas para analizar la variación de las cantidades. Identificaron un valor máximo denotado como "cúspide", "montaña" o "campana de Gauss" en la forma gráfica, el cual relacionaron con la ganancia máxima. Los alumnos fueron capaces de generar conjeturas (asociar a la ganancia un comportamiento lineal), describir y explicar la situación, y finalmente, evaluar sus conjeturas. En los resultados se observó cómo los estudiantes lograron identificar patrones, generalizarlos y expresarlos de manera retórica y simbólica, y utilizar el sistema CAS de GeoGebra para encontrar respuestas.

Un aspecto que se enfatiza en la PMM es la carta y, por lo tanto, la construcción de modelos. Si bien los estudiantes obtuvieron soluciones, les fue difícil describir los procedimientos que utilizaron para llegar a sus respuestas, así como desarrollar procedimientos generales que fueran útiles para situaciones similares. Considerar que el proceso es el producto no fue sencillo, ya que implicaba darle importancia al proceso de matematización. Los estudiantes están acostumbrados a dar respuestas únicas y exactas, y ello fue lo que ocurrió cuando realizaron la MEA.

Algo destacable en este estudio, es que antes de que los estudiantes asociaran a la situación un comportamiento cuadrático, asociaron un comportamiento lineal. Es decir, la actividad que se presentó en este documento tiene el potencial de dar elementos para que los estudiantes caractericen cada tipo de función y, con base en el contexto, discutan las diferencias entre comportamientos lineales y cuadráticos.

Referencias

Aliprantis, C. D., & Carmona, G. (2003). Introduction to an Economic Problem: A Models and Modeling Perspective. In R. Lesh, & H. M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 255-264). United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F., & Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, República Dominicana.* Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/4072/

Gutiérrez, R. E., & Prieto, J. L. (2015). Deformación y reflexión de funciones con GeoGebra. El caso de las parábolas definidas por la expresión $g(x) = ax^2$. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *88*, 115-126. Retrieved from http://funes.uniandes.edu.co/6578/
Hernández, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. *Números, 82*, 115-129. Retrieved from http://www.sinewton.org/numeros/numeros/82/Enlared_01.pdf
Lesh, R. (2010). Tools, researchable issues and conjectures for investigating what it means to understand statistics (or other topics) meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, *1*(2), 16-48.
Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewsky, J. S. (2003). Model development sequences. In R. Lesh, & H. M. Doerr. (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching (pp. 35-58).* United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
Lesh, R., & Caylor, B. (2007). Introduction to the special issue: Modeling as application versus modeling as a way to create mathematics. *International Journal of computers for mathematical Learning*, *12*(3), 173-194.
Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
López, F. J., Navarro, Y., & Fuchs, O. L. (2018). Realidad aumentada como andamiaje para la comprensión del concepto de función y gráfica lineal y cuadrática en tercer año de educación en el nivel medio superior de la BUAP. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *4*, 244-247. Retrieved from http://revistaiime.org/index.php/IIME/issue/view/8
Oviedo, N. (2013). Enseñanza y aprendizaje de Ecuación Cuadrática con apoyo Geogebra. *Actas del VII CIBEM* Retrieved from http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/810.pdf
Vargas-Alejo, V., Reyes-Rodríguez, A. V. & Cristóbal-Escalante, C. (2016). Ciclos de entendimiento de los conceptos de función y variación. Educación Matemática, 28(2), 59-84
Villarraga, S. P. (2012). *La función cuadrática y la modelación de fenómenos físicos o situaciones de la vida real utilizando herramientas tecnológicas como instrumentos de mediación* (Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia). Retrieved from de http://www.bdigital.unal.edu.co/9004/