INTERPRETIVE MODEL OF THE CONCEPTUALIZATION OF THE CONGRUENCE OF POLYGONS (MICP)

MODELO INTERPRETATIVO DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE POLÍGONOS (MICP)

Cristian Andrey Peña Acuña
Cinvestav
cristianp987@hotmail.com

Mirela Rigo-Lemini
Cinvestav
mrigolemini@gmail.com

The document presents a set of categories for the analysis of the conceptualization of the congruence of polygons - a central theme in school mathematics - and details the application of the analytical tools used, derived from Grounded Theory, in this construction. This set of categories is called 'Interpretive Model of the Conceptualization of Polygon Congruence' (MICP). This model emerged from the interpretive analysis of empirical data recollected during the investigation. The MICP categories can be used by teachers or researchers to cover different didactic objectives (e.g., interpret the resolution of tasks with congruence content; prepare student profiles or identify their difficulties. See Peña, 2019) and it is relevant because it does not seem to exist in the literature a similar model that covers the previously stated objectives.

Key words: Geometry, research methodologies.

Problem formulation and research question

The criteria of congruence and the notion of congruence are important and fundamental subjects for geometry, both for the geometry taught from the basic levels of education and for geometry as a branch of mathematics. In different versions of Euclidean geometry - proposed by Euclid, Legendre or Hilbert and which present a deductive organization with different degrees of formalization - the notion of congruence and the criteria of congruence emerge from the beginning of axiomatization. In the case of Euclid's *Elements,* according to the Heath (1908) version, the notion of congruence is introduced in Common Notion 4 (Heath, 1908) and the 'criteria of congruence of triangles' are found in propositions I.4; I.8 and I.26 (Heath, 1908). In the case of Legendre geometry (Legendre, 1984), congruence is discussed at the beginning of axiomatization and the congruence criteria for triangles are shown in propositions VI, VII, and XI. Something similar occurs in the formalization of the geometry proposed by Hilbert (1996) where the congruence criteria are also included at the beginning of the work. This allows us to suppose that in disciplinary geometry, particularly in the different versions of euclidean geometry, it is required from the beginning of axiomatization to make use of the notion of congruence and the criteria of congruence of triangles.

Just as the notion of congruence and the criteria of congruence are necessary for disciplinary geometry, they are also essential in school mathematics education. To verify this statement, curriculum for Mexico and Colombia were reviewed. In Mexico, the Secretary of Public Education (SEP, 2017) introduces in its study plans the notion of congruence and the criteria of congruence of triangles from the third year of primary - where it is requested to compare geometric figures and establish uniqueness (p.314) -, up to the third year of secondary -level at which the triangle congruence criteria are expected to be determined and used (p.315). In Colombia, the Ministry of National Education (MEN, 2006) proposes "to recognize the congruence of figures" (p.80) in the 1st and 3rd grade; "Identify and justify the congruence between figures" (p.82) between 4 ° and 5 °; make use of figure congruence to solve problems for 6th and 7th (p.84) and study the properties of congruence for 8th and 9th (p.86). All of this basically refers to the congruence of triangles.

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

Given the weight and scope that congruence has not only in disciplinary geometry but also in school geometry, tools are required to cover a series of didactic objectives related to this concept, among others: interpret the task resolutions, with congruence contents, produced by the students; elaborate student profiles and identify some of their conceptual difficulties regarding this notion; analyze the statements of the tasks and develop didactic sequences on the subject. However, in the mathematics education literature, no studies were found that provide these analysis tools for the case of triangles, and even less so for the congruence of polygons, which is the central theme of the research presented here.

When the authors of this writing did documentary research on mathematical education studies focused on polygon congruence issues, didactic proposals were found for teaching the topic (e.g. Carbó and Mántica, 2010; Piatek-Jimenez, 2008; Zakiz & Leron, 1991 to name a few). However, these works lack, for example, a systematic analysis of the possible difficulties in learning and teaching aspects related to the congruence of polygons; they also lack theoretical support that could justify the order of exposition of topics in a didactic sequence on congruence and that allow outlining possible profiles that account for the level of understanding that students have of this concept.

This document sets out a set of categories - which has been called the 'Interpretive Model of the Conceptualization of the Congruence of Polygons' (MICP) (Peña, 2019) - which is intended to help cover (albeit preliminary) the shortcomings mentioned above.

Methodology and application of the analytical tools used

For the construction of the MICP, some of the principles that rule the Grounded Theory (GT) were followed in the version by Corbin and Strauss (2015), although the study was not intended to achieve the ultimate objectives of the GT (i.e., build theory). What follows is an outline of the category construction process and some central ideas of that construction process.

In GT interpretive categories are based on empirical data collected during research and do not emerge from a theoretical framework given in advance (Corbin & Strauss, 2015). Following this general principle of the GT, the construction of the MICP was carried out, always taking care that the categories were oriented by empirical data.

Initially, the empirical data was fractured, from which patterns were constructed based on which conceptual labels were generated. In a return to the empirical domain, the authors verified that these conceptual labels adequately represented the data. Then a comparative analysis was made between the conceptual labels. From a synthesis process carried out in the conceptual domain, categories were generated. Constant comparisons, asking questions and preparing memos and diagrams, analytical tools that are part of the TF methods, were involved in all these processes (Corbin & Strauss, 2015). At a later time - which Birks and Mills (2011) call 'intermediate coding' - each of the categories was deepened and subcategories were defined and processes of logical ordering were carried out synchronously between them, making use of the idea or reification proposed by Sfard and Linchevski (1994) (paragraphs below the authors explain this point).

Subsequently, a theoretical sampling was carried out (Corbin & Strauss, 2015) that allowed to provide new properties and dimensions to the constructed categories. At a subsequent stage, these categories were confronted with the levels proposed by the researchers Van Hiele (trad. in 1984). Finally, and with the support of some of the reification ideas proposed by Sfard and Linchevski (1994) and by Wenger (2001), modifications were made at the conceptual level. This gave rise to the MICP that is exposed in this document, which has properties of a conceptual order according to the definition given by Corbin and Strauss (2015).

Literary references

As it was told, for the construction of the MICP some of the ideas proposed by Wenger (2001) and by Sfard and Linchevski (1994) were used. Wenger (2001) expresses that, to signify their daily actions and practices and their experience in the world, the members of the communities carry out reification processes. The idea of reification is generally used by Wenger to refer to the process of shaping our experience by producing objects that translate this experience into one thing (p.84). For example, writing a law, creating a recipe for a cake, or proving a theorem are reification processes in which a certain social, gastronomic, or mathematical experience is shaped or "materialized." Thus, in these processes of objectification, some aspects or characteristics of a practice become objects - the law, the cake or the theorem - objects that can be treated as if they were material and concrete elements, even when they are not. Once these objects are constituted, we perceive them as if they existed in the world, as if they had a reality of their own. This is very clear with mathematical concepts and scientific structures. They are usually seen as if they had (and as if they had always had) an independent existence.

Reification, Wenger (2001) argues, can refer to both a process, or a practice, and its product, that is, the object that results from and reflects that practice. In fact, these objects are the basis for new processes, which will give way to new objects. This consideration, applied to the field of epistemology -consideration according to which in the construction of individual and historical knowledge there is an iteration of processes that give rise to objects, which are part of new processes- underlies the organization of the categories that exposed in this document.

Sfard and Linchevski (1994) retake the ideas of reification theory for the analysis of the construction of algebraic knowledge, both historically and at the student level. In particular, they propose that, starting from a set of processes A, a first object A is generated, from which another set of processes B is carried out, in order to build an object B, which serves to carry out a set of processes C that give rise to an object C. This development allows to build increasingly abstract objects.

Wenger's ideas of reification and the interpretation made by the aforementioned authors of these ideas, based on constructivist positions, are part of the philosophical framework of the authors of this writing. This philosophical framework guided the interpretive work and the methodology from which the empirical data recovery methods were derived. However, in this work, these literary references were included in advanced stages of the analysis, when there was already a set of categories that described the data. With these literary references we worked only at the conceptual level: the categories were reorganized and renamed, assigning them much more eloquent and appropriate names, thus gaining generality, systematization, and abstraction. Peña (2019) describes the use of literary references in the construction of the MICP and details of its construction.

Methods of collecting empirical data

Eleven third-year high school students (14 to 15 years old) from a public school in Mexico City participated in the research. These students had already studied the topic of triangle congruence. Four questionnaires were applied. For questionnaire 1 and 2, the first two work sessions were arranged. The objective was to provide students with tools to work on the concept of geometry congruence (congruence as superposition, geometric constructions, basic notions of geometry). For the solution of questionnaire 3 and 4, 4 class sessions were arranged; the objective in these questionnaires was to collect information on the way in which the students understood the congruence criteria for triangles and polygons. His empirical ideas on congruence were used as empirical data for the construction of the MICP. In Peña (2019) a detailed description of the battery of questionnaires is presented.

Results

In the following, the MICP is presented and each of its phases is exemplified.

Table 1. Interpretive Model for the Analysis of Polygon Congruence

Phase 1. Empirical intrafigural idea of congruence	
Process	Object
	In this phase, triangles, some of the components of the triangle (sides, angles, base, area, perimeter) and an idea of congruence seen as a property of the components of a triangle have been conceptualized; the conceptual object in this case is the intrafigural notion of congruence. In this phase it is usual to see representations of equilateral or isosceles triangles since in this type of triangles there are sides and angles congruent to each other.
Phase 2. Empirical interfigural idea of congruence. Congruence as a property of triangles	
Process	Object
In this phase pairs of triangles are compared to determine their possible congruence. To do this, the congruence between the components of the triangles is used (a process supported in the previous phase). To determine the interfigural congruence, empirical processes are performed such as the superposition of the triangles (where the decomposition of the figure into its parts is not necessary), or the comparison of measurements of pairs of sides or corresponding angles in the triangles.	In this phase the congruence relations occur between two specific triangles. The conceptual object in this Phase is an interfigural notion; In this phase, the students do not yet take it as an object of reflection. Although there is an idea of congruence, it only makes sense when associated with specific triangles. In this phase the congruence has a purely applicative character and is not an object of reflection as such, i.e., the student's reflection does not appear to be deliberately directed toward congruence as such. The notion of congruence grammatically functions as a predicate.
Phase 3. Initiation of congruence as an object of reflection	
Process	Object

In this phase, the processes and actions carried out respond to a need to consider triangles in a general way and not only as concrete cases. In this context, students carry out cognitive processes in which they reflect directly on the congruence related to these generic objects. In this phase, they change the focus of attention: from the concrete triangles they direct their interest towards congruence as an object of reflection; in these processes they seek to characterize the congruence of triangles by appealing to their components (sides, angles, base, area ...). Although the interest or need of the students in this phase is to get rid of the concrete cases, the lack of conceptual tools leads them to return to the use of empirical methods of representation and verification of congruence; however, unlike the previous phase, the specific triangles they use are considered by the student as general representations of the triangles.	In this phase the student begins to conceive of congruence as an object on which the student reflects and with which he associates properties. In this Phase, for example, there are those answers where the student makes explicit reference to some characterization of the congruence. In this phase two sub-phases are distinguished: If the properties with which students seek to characterize the congruence are not mathematically relevant to define it, the answer is located in Phase 3.1. In this case, the characterizations that the students make of the congruence of triangles are unsystematic, inconsistent, and usually made with atypical components (base, height, perimeter, area). If the characterizations about congruence are relevant, the answer would be in phase 3.2. In this case, these characterizations are usually coherent and systematic, and usually typical components are used (sides and angles). Grammatically, in this phase, congruence already plays the role of noun.
Phase 4. Reflection on properties of congruence as an object of reflection	
Process	Object
In this phase, reflection processes occur that no longer focus only on congruence but on the properties associated with congruence (which emerged in the previous phase). It is usual to find processes where sufficient conditions (or minimum conditions) are discriminated (either correctly or incorrectly, from the mathematical point of view) to guarantee congruence. This is done by the student with the understanding that it is possible to limit, depending on certain conditions or reasons, the number of components to establish the congruence of two triangles. In the case in which sufficient conditions that are correct are chosen, they coincide with what in school mathematics is known as the congruence criteria (SSS, SAS and ASA).	In this phase, sufficient conditions are associated with congruence, which are based on a definition of congruence that occurred in the previous phase. These are new properties related to this conceptual object, which make it much more general and more solid, although in this Phase it is still tied to empirical considerations. Two sub-phases are also identified in this phase: If the characterizations that the students carry out are erratic or inconsistent (e.g. when there are cases of consistency criteria such as AA, SSSA, SSSAA) it is associated with Sub phase 4.1. On the other hand, if the minimum conditions proposed by the students to guarantee consistency are mathematically correct (e.g. the consistency criteria), it is in Sub phase 2
Phase 5. Processes of deductive support.	
Process	Object
Students use deductive processes, based on definitions and general properties, to answer the why of certain properties of congruence (e.g., sufficient conditions for congruence of polygons) and other properties of congruence that they can conjecture or anticipate.	The mathematical concept of congruence is consolidated, as a general and abstract concept, by supporting some of its properties in deductive arguments.

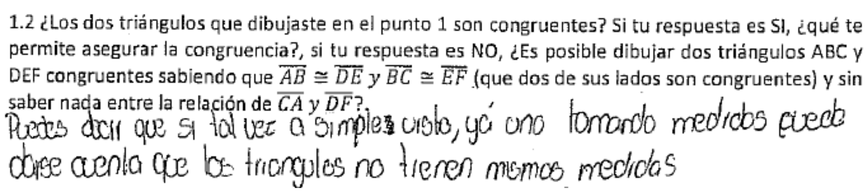
To exemplify the phases of the MICP, in the following some productions of the students are presented. Although examples of each phase are offered, the categorization of the students' responses was not carried out considering these responses in isolation. In the interpretation of each answer, the response patterns identified in the course of each student's production were taken into account as an analysis criterion.

Phase 1. Empirical intrafigural idea of congruence

Figure 1. Student response 2 to question 1 of questionnaire 3

The answer of figure 1 is located in this phase since the student shows to be aware that the triangle can be separated into components (sides); proof of this is that he names the sides and gives them a measurement. In this case, the congruence relations that are observed are only intra-figural, which can be verified in the fact that he only directs his gaze towards the congruence of sides that are part of the first triangle (side A and side C).

Phase 2. Empirical inter-figural idea of congruence. Congruence as a property of triangles.


1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?

Puedes decir que si tal vez a simple vista, ya que tomando medidas puede darse cuenta que los triangulos no tienen mismas medidas

Figure 2. Student response 1 to question 1.2 of questionnaire 3

The answer in figure 2 is found in phase 2 since the student explicitly shows that he is thinking of two particular triangles; this is seen when the student says "by taking measurements you can see that the triangles have the same measurements". Furthermore, he evaluates congruence through an empirical comparison method, which he calls “at a glance”.

Phase 3. Reflection on consistency.

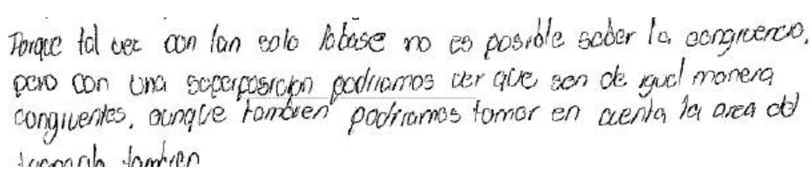
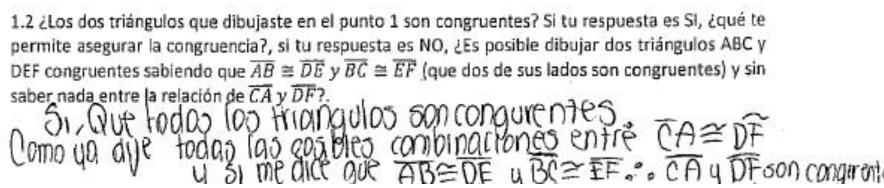

Porque tal vez con tan solo la base no es posible saber la congruencia, pero con una superposición podríamos ver que son de igual manera congruentes, aunque también podríamos tomar en cuenta la area del triangulo también

Figure 3. Student 1 response to question 1.4b of questionnaire 3

Figure 3 presents a student's answer to the following question: what other minimum data should we have to ensure the congruence of two triangles if we already have a pair of corresponding congruent sides? As a result, the student does not seem to propose sufficiency criteria (as expected); on the contrary, he proposes a way to characterize congruence in terms of necessity, the latter being a constant in many of his other responses. On the other hand, it seems that the student lacks conceptual tools to support his hypothesis, so he must resort to a known field, the superposition, even when he tries to characterize the congruence far from the empirical verification methods. In this case, the student was in subphase 3.1, since his characterizations turn out to be atypical (since he makes use of the base of the triangles).

Phase 4. Reflection on properties of congruence as an object of reflection

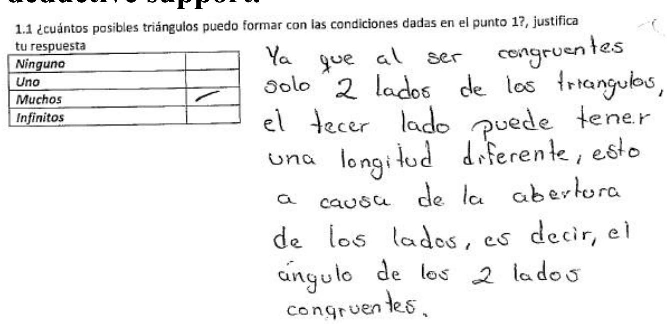

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?

Si, Que todos los triangulos son congurentes. Como ya dije todas las posibles combinaciones entre $\overline{CA} \cong \overline{DF}$ y si me dice que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ∴ $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$ son congruent

Figure 4. Student response 6 to question 1.2 of questionnaire 3

The answer of figure 4 corresponds to this level since the student shows to have characterized certain sufficient criteria for polygon congruence, although in this particular case those criteria are erroneous. The student shows to believe that it is possible, having (AB)‾≅ (DF)‾ and $\overline{(BC)} \cong \overline{(EF)}$ ensure that $\overline{(CA)} \cong \overline{(DF)}$, this shows that he understands, at least in one level basic, the sufficient conditions, i.e., is aware that it is possible to exclude components in the congruence of triangles and still continue to ensure congruence.

Phase 5. Processes of deductive support.


1.1 ¿cuántos posibles triángulos puedo formar con las condiciones dadas en el punto 1?, justifica tu respuesta

Ninguno	
Uno	
Muchos	✓
Infinitos	

Ya que al ser congruentes solo 2 lados de los triangulos, el tecer lado puede tener una longitud diferente, esto a causa de la abertura de los lados, es decir, el ángulo de los 2 lados congruentes.

Figure 5. Student response 7 to question 1.1 of questionnaire 3

The answer in figure 5 is in phase 5 since the student presents a deductive argument that supports the congruence criterion for SAS triangles.

Comments and conclusions

The MICP is a preliminary model. It is hoped, in future works, to be able to further refine the model by adding properties to the phases. In future works, the authors of this document will seek to identify the types of arguments presented in each phase. The MICP is considered to be a model that can be useful for teachers, researchers and people involved with education in mathematics, since it allows analyzing the productions of students, their possible profiles in relation to performance in congruence tasks (Peña, 2019), in addition to suggesting hypotheses about possible trajectories of the construction of the concept of "congruence" in the classroom.

The authors of the document have considered important to detail the process of construction of the MICP categories, because that constructive process allows readers to get a closer look at the construction of conceptual categories, whose details are often omitted in the research literature in mathematics education. The authors of the writing are aware that the work involved in the construction of the categories is sometimes enormous, that the data is often overwhelming and that there will be many moments when the researcher (in training and already trained) must reformulate and discard ideas that had already developed. However, even with all the problems involved in constructing theoretical models or conceptual categories, the process that this entails leads, from our point of view, to basically understanding what it involves doing a certain type of research.

References

Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory. A practical guide*. Londres, Inglaterra: SAGE Publications.
Carbó, A. y Mántica, A. (2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 376-386). La Pampa, Argentina: REPEM.
Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, EE. UU.: SAGE Publications.
Heath, T. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. Cambridge, Inglaterra: University Press.
Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. Madrid, España: Bouncopy. S.A.
Legendre, A. M. (1849). *Elements de Geometrie* (2da ed.). Paris, Francia: L´ Institut de France.
MEN [Ministry of National Education]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia. Recovered from http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.
Peña, C. A. (2019). *Categorías para valorar el desempeño de estudiantes sobresalientes de tercero de secundaria ante tareas de congruencia de polígonos: una propuesta de ordenamiento conceptual* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.
Piatek-Jiminez, K. (2008). Building Intuitive Arguments for the Triangle Congruence Conditions. National Council of Teachers of Mathematics, 101(6), 463-466.
SEP [Secretary of Public Education]. (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México. Recovered from https://www.tamaulipas.gob.mx/educacion/wp-content/uploads/sites/3/2017/07/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf
Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228. doi: 10.1007/BF01273663
Van Hiele, P. M. (1984). *The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School* (Fuiz, D., Geddes, D. & Tischler, R. Trad.). New York, EE. UU.: Broooklyn College. (Original work published in 1957)
Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona, España: Paidós.
Zakiz, R. & Leron, U. (1991). Capturing congruence with a turtle. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 285-295. doi: 10.1007/BF00368342

MODELO INTERPRETATIVO DE LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE POLÍGONOS (MICP)

INTERPRETIVE MODEL OF THE CONCEPTUALIZATION OF THE CONGRUENCE OF POLYGONS (MICP)

Cristian Andrey Peña Acuña
Cinvestav
cristianp987@hotmail.com

Mirela Rigo-Lemini
Cinvestav
mrigolemini@gmail.com

En el documento se presenta un conjunto de categorías para el análisis de la conceptualización de la congruencia de polígonos -tema central en la matemática escolar- y se detalla la aplicación de las herramientas analíticas empleadas, provenientes de la Teoría Fundamentada, en esa construcción. A ese conjunto de categorías se le llama 'Modelo interpretativo de la conceptualización de la congruencia de polígonos' (MICP). Este modelo surgió como resultado de la interpretación de datos empíricos recuperados durante la investigación. Las categorías del MICP pueden ser empleadas por profesores o investigadores para cubrir distintos objetivos didácticos (e.g., interpretar la resolución de tareas de contenidos de congruencia; elaborar perfiles de estudiantes o identificar sus *dificultades. Ver Peña, 2019) y resulta relevante porque no parece existir en la literatura un modelo semejante que cubra los objetivos antes planteados.*

Palabras clave: Geometría, metodologías de la investigación.

Planteamiento del problema y pregunta de investigación

Los criterios de congruencia y la noción de congruencia son temas importantes y fundamentales para la geometría, tanto para la que se enseña desde los niveles básicos de educación como para la disciplinar. En distintas versiones de la geometría euclidiana -propuestas por Euclides, Legendre o Hilbert y que presentan una organización deductiva con distintos grados de formalización- la noción de congruencia y los criterios de congruencia surgen desde los inicios de la axiomatización. En el caso de *Los Elementos* de Euclides, conforme a la versión de Heath (1956), la noción de congruencia se introduce en la Noción Común 4 y los 'criterios de congruencia de triángulos' se encuentran en las proposiciones I.4; I.8 y I.26. En el caso de la geometría de Legendre (Legendre, 1984), se habla de la congruencia en los inicios de la axiomatización y se muestran los criterios de congruencia para los triángulos en las proposiciones VI, VII y XI. Algo similar ocurre en la formalización de la geometría propuesta por Hilbert (1996) en donde también se incluyen los criterios de congruencia al inicio de la obra. Lo anterior permite suponer que en la geometría disciplinar, particularmente en las diferentes versiones de la geometría Euclidiana, se requiere desde los inicios de la axiomatización hacer uso de la noción de congruencia y de los criterios de congruencia de triángulos.

Así como la noción de congruencia y los criterios de congruencia resultan necesarios para la geometría disciplinar, de igual forma resultan imprescindibles en la educación matemática escolar. Para verificar esta afirmación se revisaron planes de estudio de México y de Colombia. En México, la Secretaria de Educación pública (SEP, 2017) introduce en sus planes de estudio a la noción de congruencia y los criterios de congruencia de triángulos desde tercero de primaria -donde se solicita comparar figuras geométricas y establecer unicidad (p.314)-, hasta tercero de secundaria -nivel en el que se espera que se determinen y usen los criterios de congruencia de triángulos (p.315). En Colombia, el Ministerio Nacional de Educación (MEN, 2006) propone "reconocer a la congruencia de figuras" (p.80) en el 1° y el 3° grado; "identificar y justificar la congruencia entre figuras" (p.82) entre 4° y 5°; hacer uso de la congruencia de figuras para resolver problemas para 6° y 7° (p.84) y el estudio de las propiedades de la congruencia para 8° y 9° (p.86). Todo esto hace referencia básicamente a la congruencia de triángulos.

Dado el peso y el alcance que la congruencia tiene no solo en la geometría disciplinar sino en la geometría escolar, se requieren herramientas que permitan cubrir una serie de objetivos didácticos relacionados con ese concepto, entre otros: interpretar las resoluciones de tareas de contenidos de congruencia elaboradas por los alumnos, elaborar perfiles de estudiantes e identificar algunas de sus dificultades conceptuales sobre esa noción; analizar los enunciados de las tareas mismas y elaborar secuencias didácticas sobre el tema. No obstante, no parecen haber trabajos en investigación en educación matemática que brinden estas herramientas de análisis para el caso de los triángulos, y menos aún, para la congruencia de polígonos, que es el tema central de la investigación que aquí se expone.

Al hacer investigación documental sobre reportes de estudio de educación matemática centrados en temas de congruencia de polígonos, solo se encontraron propuestas didácticas para la enseñanza del tema (Carbó y Mántica, 2010; Piatek-Jimenez, 2008; Zakiz y Leron, 1991 por citar algunos). Estos trabajos carecen, por ejemplo, de un análisis sistemático de las posibles dificultades en el aprendizaje y la enseñanza de temas afines a la congruencia de polígonos; carecen también de sustentos teóricos que pudieran justificar el orden de exposición de tareas en una secuencia didáctica sobre la congruencia y que permitan delinear posibles perfiles que den cuenta del nivel de comprensión que los alumnos poseen de este concepto.

En este documento se expone un conjunto de categorías -al que se le ha llamado 'Modelo interpretativo de la conceptualización de la congruencia de polígonos' (MICP) (Peña, 2019)- que tiene la intención de ayudar a cubrir (aunque sea de manera preliminar) las carencias antes planteadas.

Metodología y aplicación de las herramientas analíticas empleadas

Para la construcción del MICP se siguieron algunos de los principios que rigen la Teoría Fundamentada (TF) en la versión de Corbin y Strauss (2015), si bien el estudio no tenía como propósito alcanzar los objetivos últimos de la TF (i.e., hacer teoría). En lo que sigue se esboza el proceso de construcción de las categorías y algunas ideas centrales.

En la TF las categorías interpretativas se basan en los datos empíricos que se recolectan durante la investigación y no emergen de un marco teórico dado de antemano (Corbin & Strauss, 2015). Siguiendo este principio general de la TF, se realizó la construcción del MICP cuidando siempre que las categorías estuvieran orientadas por los datos empíricos.

En un primer momento se fracturaron los datos empíricos, a partir de lo cual se construyeron patrones con base en los cuales se generaron etiquetas conceptuales. En un regreso al dominio empírico, se comprobó que dichas etiquetas representaran a los datos. Enseguida se hizo un análisis comparativo entre las etiquetas conceptuales. A partir de un proceso de síntesis llevado a cabo en el dominio conceptual, se generaron categorías. En todos estos procesos estuvieron involucradas las comparaciones constantes, el planteamiento de preguntas y la elaboración de memos y diagramas, herramientas analíticas que forman parte de los métodos de la TF (Corbin & Strauss, 2015). En un momento posterior -que Birks y Mills (2011) denominan de 'codificación intermedia'- se profundizó en cada una de las categorías y se definieron subcategorías y sincrónicamente se realizaron procesos de ordenamiento lógico entre ellas, haciendo uso de las ideas propuestas por Sfard y Linchevski (1994).

Posteriormente, se realizó un muestreo teórico (Corbin & Strauss, 2015) que permitió dotar de nuevas propiedades y dimensiones a las categorías construidas. En una etapa subsecuente, estas categorías se confrontaron con los niveles propuestos por los investigadores Van Hiele (trad. en 1984). Finalmente, y con apoyo de algunas de las ideas de cosificación propuestas por Sfard y Linchevski (1994) y por Wenger (2001), se realizaron modificaciones a nivel conceptual. Esto dio lugar al MICP que se expone en este documento, el cual posee propiedades de un ordenamiento conceptual de acuerdo con la definición que dan Corbin y Strauss (2015).

Referentes Literarios

Para la construcción del MICP se usaron algunas de las ideas propuestas por Wenger (2001) y por Sfard y Linchevski (1994). Wenger (2001) expresa que, con el fin de significar sus acciones y prácticas cotidianas y su experiencia en el mundo, los miembros de las comunidades llevan a cabo procesos de cosificación. La idea de cosificación la emplea Wenger de manera general para referirse al proceso de dar forma a nuestra experiencia produciendo objetos que plasman esta experiencia en una cosa (p. 84). Por ejemplo, redactar una ley, crear una receta para un pastel o demostrar un teorema son procesos de cosificación en los que se da forma o se 'materializa' una cierta experiencia social, gastronómica o matemática. Así, en estos procesos de cosificación se convierten en objetos -la ley, el pastel o el teorema- algunos aspectos o características de una práctica, objetos que pueden ser tratados como si fueran elementos materiales y concretos, aún y cuando no lo sean. Una vez constituidos esos objetos, los percibimos como si existieran en el mundo, como si tuvieran una realidad propia. Esto es muy claro con los conceptos matemáticos y las estructuras científicas. Se suelen ver como si tuvieran (y como si siempre hubieran tenido) una existencia independiente.

La cosificación, sostiene Wenger (2001), puede hacer referencia tanto a un proceso, o una práctica, como a su producto, es decir, al objeto que resulta y es reflejo de esa práctica. De hecho, esos objetos son la base para nuevos procesos, mismos que darán paso a nuevos objetos. Esta consideración, aplicada al terreno de la epistemología -consideración conforme a la cual en la construcción del conocimiento individual e histórico se da una iteración de procesos que dan lugar a objetos, que forman parte de nuevos procesos- subyace a la organización de las categorías que se exponen en este documento.

Sfard y Linchevski (1994) retoman las ideas de la teoría de la reificación para el análisis de la construcción de conocimientos algebraicos, tanto a nivel histórico como a nivel del estudiante. En particular, ellas proponen que, partiendo de un conjunto de procesos A, se genera un primer objeto A, a partir del cual se realiza otro conjunto de procesos B, para así construir un objeto B, mismo que sirve para realizar un conjunto de procesos C que dan lugar a un objeto C. Este desarrollo permite construir objetos cada vez más abstractos.

Las ideas de cosificación de Wenger y la interpretación que hacen las autoras antes citadas de esas ideas, basadas en posturas constructivistas, forman parte del marco filosófico de los autores de este escrito. Ese marco filosófico orientó el trabajo interpretativo y la metodología de la cual se desprendieron los métodos de recuperación de datos empíricos. Sin embargo, en este trabajo esos referentes literarios se incluyeron en fases avanzadas del análisis, cuando ya se contaba con un conjunto de categorías que describían los datos. Con esos referentes literarios se trabajó sólo a nivel conceptual: se reorganizaron las categorías y se renombraron, asignándoles nombres mucho más elocuentes y adecuados, con lo que se ganó generalidad, sistematización y abstracción. En Peña (2019) se describe el empleo de los referentes literarios en la construcción del MICP y detalles de su construcción.

Métodos de recolección de los datos empíricos

En la investigación participaron 11 estudiantes de tercero de secundaria (14 a 15 años) de una escuela pública de la ciudad de México. Estos alumnos ya habían estudiado el tema de congruencia de triángulos. Se aplicaron cuatro cuestionarios. Para el cuestionario 1 y 2 se dispusieron las dos primeras sesiones de trabajo. El objetivo fue brindar a los estudiantes herramientas para trabajar sobre el concepto de congruencia de geometría (congruencia como superposición, construcciones geométricas, nociones básicas de la geometría). Para la solución del cuestionario 3 y 4 se dispusieron 4 sesiones de clase, el objetivo en estos cuestionarios era el recolectar información sobre la manera en la que los estudiantes entendían los criterios de congruencia para triángulos y polígonos. Como datos empíricos para la construcción del MICP se utilizaron sus ideas sobre la congruencia. En Peña (2019) se presenta una descripción detallada de la batería de cuestionarios.

Resultados

En lo que sigue se presenta el MICP y se ejemplifican cada una de sus fases.

Tabla 1. Modelo Interpretativo para el análisis de la Congruencia de Polígonos

Fase 1. Idea empírica intrafigural de congruencia	
Proceso	Objeto
	En esta fase se han conceptualizado los triángulos, algunos de los componentes del triángulo (lados, ángulos, base, área, perímetro) y una idea de la congruencia vista como una propiedad de los

	componentes de un triángulo; el objeto conceptual en este caso es la noción intrafigural de la congruencia. En esta fase es usual ver representaciones de triángulos equiláteros o isósceles ya que en este tipo de triángulos hay lados y ángulos congruentes entre sí.
Fase 2. Idea empírica interfigural de congruencia. la congruencia como una propiedad de triángulos	
Proceso	Objeto
En esta fase se comparan parejas de triángulos para determinar su posible congruencia. Para ello se recurre a la determinación de la congruencia entre los componentes de los triángulos (proceso que se respalda en la fase anterior). Para la determinación de la congruencia interfigural, se realizan procesos empíricos como la superposición de los triángulos (en donde no es necesaria la descomposición de la figura en sus partes) o la comparación de medidas de pares de lados o ángulos correspondientes en los triángulos.	En esta fase las relaciones de congruencia se dan entre dos triángulos concretos. El objeto conceptual en esta Fase es una noción interfigural; en esta Fase, todavía no se reflexiona sobre ese objeto. Aunque hay una idea de congruencia, solo cobra sentido cuando se le asocia a triángulos concretos. En esta fase la congruencia tiene un carácter puramente aplicativo y no es objeto de reflexión como tal; i.e, no parece que la reflexión del estudiante se dirija deliberadamente hacia la congruencia como tal. La noción de congruencia gramaticalmente funge como predicado.
Fase 3. Inicio de la congruencia como objeto de reflexión	
Proceso	Objeto
En esta fase los procesos y las acciones que se llevan a cabo responden a una necesidad de considerar a los triángulos de manera general y no solo como casos concretos. En este contexto, los alumnos realizan procesos cognitivos en los que reflexionan directamente sobre la congruencia relacionada con esos objetos genéricos. En esta fase, ellos cambian el foco de atención: de los triángulos concretos dirigen su interés hacia la congruencia como un objeto de reflexión; en estos procesos buscan caracterizar a la congruencia de triángulos apelando a sus componentes (lados, ángulos, base, área…). Aunque el interés o necesidad de los alumnos en esta fase es desprenderse de los casos concretos, la falta de herramientas conceptuales los lleva a regresar al uso de métodos empíricos de representación y verificación de la congruencia; sin embargo, a diferencia de la fase previa, los triángulos concretos que utilizan son considerados por el alumno como representaciones generales de los triángulos.	En esta fase el alumno empieza a concebir a la congruencia como un objeto sobre el cual el alumno reflexiona y al cual le asocia propiedades. En esta Fase, por ejemplo, se encuentran aquellas respuestas en donde el alumno hace referencia explícita a alguna caracterización de la congruencia. En esta fase se distinguen dos sub fases: Si las propiedades con las que busca caracterizar a la congruencia no son matemáticamente relevantes para definirla, su respuesta se ubica en la Fase 3.1. En este caso, las caracterizaciones que realizan los alumnos de la congruencia de triángulos son asistemáticas, incoherentes y usualmente realizadas con componentes atípicos (Base, altura, perímetro, área). Si las caracterizaciones sobre la congruencia son relevantes, su respuesta se ubicaría en la fase 3.2. En este caso, esas caracterizaciones suelen ser coherentes y sistemáticas, y usualmente se acude a componentes típicos (Lados y ángulos). Gramaticalmente, en esta Fase la congruencia juega ya el papel de sustantivo.
Fase 4. Reflexión en torno a propiedades de la congruencia como objeto de reflexión	
Proceso	Objeto
En esta fase se dan procesos de reflexión que ya no solo se centran en la congruencia sino en las propiedades que se asocian a la congruencia (que	En esta fase se asocian a la congruencia condiciones suficientes, las que se basan en una definición de la congruencia que se dio en la fase previa. Se trata de

surgieron en la fase anterior). Es usual encontrar procesos en donde se discriminan (ya sea correcta o incorrectamente, desde el punto de vista matemático) condiciones suficientes (o condiciones mínimas) para garantizar la congruencia. Esto lo hace el alumno con la comprensión de que es posible acotar, atendiendo a ciertas condiciones o razones, la cantidad de componentes a considerar para establecer la congruencia de dos triángulos. En el caso en el que se eligen condiciones suficientes correctas, coinciden con lo que en la matemática escolar se conoce como los criterios de congruencia (LLL, LAL y ALA).	nuevas propiedades relacionadas con este objeto conceptual, que lo hacen mucho más general y más sólido, aunque en esta Fase todavía esté atado a consideraciones empíricas. En esta Fase se identifican también dos subfases: Si las caracterizaciones que realizan los alumnos son erráticas o incoherentes (e.g. cuando se dan casos de criterios de congruencia como AA, LLLA, LLLAA) se asocia a la Sub fase 4.1. Por otro lado, si las condiciones mínimas que proponen los alumnos para garantizar la congruencia son matemáticamente correctas (e.g. los criterios de congruencia) se ubica en la Sub fase 2
Fase 5. Procesos de sustentación deductiva.	
Proceso	Objeto
Los alumnos recurren a procesos deductivos, basados en definiciones y propiedades generales, para dar respuesta al por qué de ciertas propiedades de la congruencia (e.g., condiciones suficientes para la congruencia de polígonos) y a otras propiedades de la congruencia que ellos pueden conjeturar o anticipar.	Se consolida el concepto matemático de congruencia, como un concepto general y abstracto, al sustentar algunas de sus propiedades en argumentos de tipo deductivo.

Para ejemplificar las fases del MICP, en lo que sigue se presentan algunas producciones de los estudiantes. Aunque se ofrecen ejemplos particulares de cada fase, la categorización de las respuestas de los alumnos no se realizó considerando esas respuestas de manera aislada. En la interpretación de cada respuesta se tomó en cuenta, como criterio de análisis, los patrones de respuesta identificados en el transcurso de la producción de cada alumno.

Fase 1. Idea empírica intrafigural de congruencia:

Figura 1. Respuesta del alumno 2 a la pregunta 1 del cuestionario 3

La respuesta de la figura 1 se ubica en esta fase ya que el alumno muestra ser consciente de que el triángulo se puede separar en componentes (lados); y es que él nombra los lados y les da una medida. En este caso, las relaciones de congruencia que se observan solo son intrafigurales, lo cual se puede constatar en el hecho de que él solo dirige su mirada hacia la congruencia de lados que forman parte del primer triángulo (el lado A y el lado C).

Fase 2. Idea empírica interfigural de congruencia.

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?

Puedes decir que si tal vez a simple vista, ya uno tomando medidas puede darse cuenta que los triangulos no tienen mismas medidas

Figura 2. Respuesta del alumno 1 a la pregunta 1.2 del cuestionario 3

La respuesta de la figura 2 se encuentra en la fase 2 ya que el alumno muestra explícitamente estar pensando en dos triángulos particulares; esto se ve cuando el alumno dice "tomando medidas puede darse cuenta que los triángulos tienen mismas medidas". Además, evalúa la congruencia a través de un método de comparación empírico, que él llama "a simple vista".

Fase 3. Reflexión en torno a la congruencia.

Porque tal vez con tan solo la base no es posible saber la congruencia, pero con una superposición podríamos ver que son de igual manera congruentes, aunque también podríamos tomar en cuenta la area del triangulo también

Figura 3. Respuesta del alumno 1 a la pregunta 1.4b del cuestionario 3

En la figura 3 se presenta la respuesta de un alumno a la siguiente pregunta ¿qué otros datos mínimos debemos tener para asegurar la congruencia de dos triángulos si ya se tiene un par de lados correspondientes congruentes? Como resultado el estudiante no parece proponer criterios de suficiencia (como se esperaba); por el contrario, él propone una manera de caracterizar a la congruencia en términos de necesidad, esto último es una constante en muchas de sus otras respuestas. Por otro lado, parece que el alumno carece de herramientas conceptuales para soportar su hipótesis, por lo que debe recurrir a un campo conocido, la superposición, aun cuando intenta caracterizar a la congruencia lejos de los métodos empíricos de verificación. En este caso particular el alumno se ubicó en la subfase 3.1, pues sus caracterizaciones resultan ser atípicas (ya que hace uso de la base de los triángulos).

Fase 4. Reflexión en torno a propiedades de la congruencia.

1.2 ¿Los dos triángulos que dibujaste en el punto 1 son congruentes? Si tu respuesta es SI, ¿qué te permite asegurar la congruencia?, si tu respuesta es NO, ¿Es posible dibujar dos triángulos ABC y DEF congruentes sabiendo que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ (que dos de sus lados son congruentes) y sin saber nada entre la relación de $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$?

Si, Que todos los triangulos son congurentes. Como ya dije todas las posibles combinaciones entre $\overline{CA} \cong \overline{DF}$ y si me dice que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\therefore$ $\overline{CA}$ y $\overline{DF}$ son congruentes

Figura 4. Respuesta del alumno 6 a la pregunta 1.2 del cuestionario 3

La respuesta de la figura 4 corresponde a este nivel ya que el alumno muestra haber caracterizado ciertos criterios de suficiencia de congruencia de polígonos, aunque para este caso particular dichos criterios sean erróneos. El alumno muestra creer que es posible, teniendo $\overline{AB} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ asegurar que $\overline{CA} \cong \overline{DF}$, esto muestra que comprende, al menos en un nivel básico, las condiciones de suficiencia, i.e es consciente de que es posible prescindir de componentes en la congruencia de triángulos y aun así seguir asegurando la congruencia.

Fase 5. Procesos de sustentación deductiva.

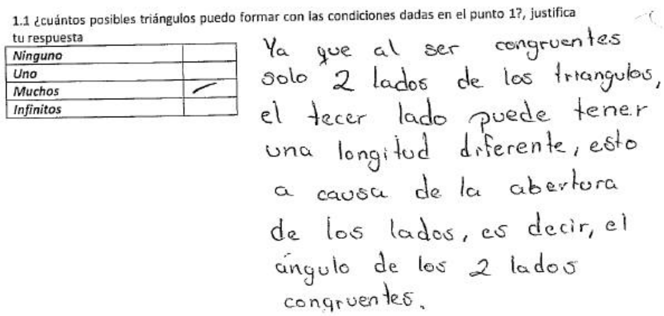


Figura 5. Respuesta del alumno 7 a la pregunta 1.1 del cuestionario 3

Se ubica la respuesta en la figura 5 en la fase 5 ya que el alumno presenta un argumento deductivo que sustenta al criterio de congruencia para triángulos LAL.

Comentarios y conclusiones

El MICP es un modelo preliminar. Se espera, en trabajos futuros, poder seguir afinando el modelo agregando propiedades a las fases. Particularmente, en trabajos próximos, los autores de este documento buscarán identificar los tipos de argumentos que se presentan en cada fase. Se considera que el MICP es un modelo que puede ser útil para profesores, investigadores y personas involucradas con la educación en matemática, pues permite analizar las producciones de los estudiantes, sus posibles perfiles con relación al desempeño en tareas de congruencia (Peña, 2019), además de que sugiere hipótesis sobre trayectorias posibles de la construcción del concepto de "congruencia" en el aula.

Los autores del documento han considerado importante detallar en este escrito el proceso de construcción de las categorías del MICP, porque ese proceso constructivo -cuyos detalles se suelen omitir en la literatura en investigación en educación matemática- le permite a los investigadores mirar de manera crítica y a profundidad en los temas de su estudio y les permite generalmente ir más allá de lo que está escrito. Los autores del escrito están conscientes que el trabajo que supone la construcción de las categorías es a veces enorme, que en muchas ocasiones los datos abruman y que habrá muchos momentos en donde el investigador (en formación y ya formado) debe reformular y descartar ideas que ya había desarrollado. Sin embargo, aun con todos los problemas que conlleva la construcción de modelos teóricos o categorías conceptuales, el proceso que esto supone lleva, desde nuestro punto de vista, a comprender básicamente lo que implica hacer un cierto tipo de investigación.

Referencias

Birks, M. & Mills, J. (2011). *Grounded Theory. A practical guide*. Londres, Inglaterra: SAGE Publications.

Carbó, A. y Mántica, A. (2010). Una propuesta para trabajar congruencia de triángulos en la escuela secundaria priorizando la validación. *Memorias de la III Reunión Pampeana de Educación Matemática* (pp. 376-386). La Pampa, Argentina: REPEM.

Corbin, J. & Strauss, A. (2015). *Basics of Qualitative Research: Techniques and Procedures for Developing Grounded Theory* (4nd ed.). California, EE. UU: SAGE Publications.

Heath, T. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements. Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary*. New York: Dover.

Hilbert, D. (1996). *Fundamentos de la geometría*. Madrid, España: Bouncopy. S.A.

Legendre, A. M. (1849). *Elements de Geometrie* (2da ed.). Paris, Francia: L´ Institut de France.

MEN [Ministerio de Educación Nacional]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf.

Peña, C. A. (2019). *Categorías para valorar el desempeño de estudiantes sobresalientes de tercero de secundaria ante tareas de congruencia de polígonos: una propuesta de ordenamiento conceptual* (Tesis de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México.

Piatek-Jimenez, K. (2008). Building Intuitive Arguments for the Triangle Congruence Conditions. *National Council of Teachers of Mathematics*, *101*(6)*,* 463-466.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral plan y programas de estudio para la educación básica*. Ciudad de México, México. Recuperado de https://www.tamaulipas.gob.mx/educacion/wp-content/uploads/sites/3/2017/07/aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228. doi: 10.1007/BF01273663

Van Hiele, P. M. (1984). *The Didactics of Geometry in the Lowest Class of Secondary School* (Fuiz, D., Geddes, D. & Tischler, R. Trad.). New York, EE. UU.: Broooklyn College. (Obra original publicada en 1957)

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona, España: Paidós.

Zakiz, R. & Leron, U. (1991). Capturing congruence with a turtle. *Educational Studies in Mathematics*, *22,* 285-295. doi: 10.1007/BF00368342