DEVELOPMENT OF SPACE REASONING IN EARLY AGES THROUGH VARIATION ACTIVITIES

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE RAZONAMIENTO ESPACIAL EN EDADES TEMPRANAS A TRAVÉS DE MANIPULATIVOS

Yudi Andrea Ortiz-Rocha
Cinvestav, México
yudi.ortiz@cinvestav.mx

Ivonne Sandoval
Universidad Pedagógica Nacional, México
isandoval@upn.mx

Ana Isabel Sacristán
Cinvestav, México
asacrist@cinvestav.mx

Spatial reasoning skills are necessary to perform activities at school, at work and in everyday life, in general. Different studies indicate the importance of its development at an early age, since it allows the reading of a three-dimensional world and its interpretation in two-dimensional representations. Our research focuses on the design of activities, using the Theory of Variation, to enhance spatial reasoning skills in seven to eight year-old students. In this document, we present characteristics of the design of an activity based on the use of pentominoes (two-dimensional puzzles). The results show that spatial reasoning skills develop when the following actions are favored: comparing, overlapping, rotating, moving, visualizing, and imagining movements, positions and locations of the pentomino pieces.

Keywords: Elementary School Education, Spatial Thinking, Representations and Visualization

Introduction and background

Spatial reasoning skills are necessary in human thinking and acting. The importance of developing these skills is reflected both in everyday life and in the school environment. In everyday life, authors such as Gonzato, Fernández & Díaz Godino (2011) recognize, for example, that the development of spatial reasoning is necessary to locate, move and read maps where bi-and three-dimensional objects may be present. Research also indicates that these skills are necessary for learning advanced mathematics (Mamolo, Ruttenberg-Rozen & Whiteley, 2015; Hallowell et al., 2015) and for the development in other areas such as technology, engineering, architecture (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade & Robitzsch, 2015), geography, computer graphics and visual arts (Clements & Sarama, 2011; Vázquez & Noriega Biggio, 2010). In terms of the relationship between spatial thinking and STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) performance, Uttal and Cohen (2012) suggested that spatial skills strongly predict student selection for studying the STEM subjects.

Although the importance of developing spatial reasoning skills in school is recognized, a review of the literature in mathematics education (Ortiz, 2018; Ortiz, Sacristán & Sandoval, 2019), shows a lack of studies for enhancing students' competences, abilities, thinking, or spatial reasoning. Ortiz (2018) analyzed articles in 12 mathematics education journals in English and Spanish, published between 2010 and 2016. She observed that only 4.7% of the articles focus on aspects of learning and teaching geometry (in contrast to those focused on arithmetic, algebra and calculus). Of this percentage, only 13% address aspects of spatial reasoning: some describe the importance of its development, others focus on identifying difficulties and some more present activity proposals.

Research focused on analyzing the consequences of a poor development of spatial reasoning, have identified difficulties in the visualization of 2D and 3D representations (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015); in the turning movement of 2D and 3D objects (Pittalis & Christou, 2010); in understanding the meaning of area and volume formulas (Mamolo, Ruttenberg-Rozen & Whiteley, 2015); in the construction of 2D and 3D figures (Pittalis & Christou, 2010); in relating 2D and 3D representations

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

(Dindyal, 2015); and in reading maps (Gonzato, Fernández & Díaz, 2011). These difficulties have been found to affect other disciplines and work areas that involve interpreting representations to solve tasks (Francis & Whiteley, 2015).

In relation to the design of activity proposals, the research recognizes objectives categorized by educational level: in preschool and elementary school, students are expected to recognize two-dimensional representations (drawings) of real objects (Hallowell, Okamoto, Romo & La Joy, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade & Robitzsch, 2015); in secondary school, students are expected to manipulate 3D objects, either with dynamic geometry or tangible materials (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015; Gómez, Albaladejo & López, 2016), and be able to draw conjectures of events related to a specific context.

There are also few longitudinal studies focused on describing what type of materials, activities, or teaching/learning proposals promote the development of spatial reasoning skills. As Davis, Okamoto and Whiteley (2015) point out, further research is required in this regard.

In this sense, the study on which this document is based, investigated how to provide, through the design of activities involving 2D and 3D representations, learning opportunities for 7 to 8 year-old students to develop their spatial reasoning skills. To answer this, we designed six activities based on the Theory of Variation (Marton & Pang, 2006), which were implemented in a public school located in a marginalized area of Mexico City.

This document presents the design of the first activity that involves isometric movements in the plane, using puzzles with pentomino pieces. Next, we describe some elements of the Theory of Variation on which we based the activity design; we then provide a brief analysis of how this design can promote the development of students' spatial reasoning.

Theoretical perspective: Variation as a tool for the design of the activities

In the Theory of Variation (Marton & Pang, 2006; Ling-Lo, 2012) learning happens when a difference is experienced between two things or between two parts of the same thing (Marton & Pang, 2006), that is, when the learner manages to *discern characteristics* and *critical aspects* of some *learning object* (Orgill, 2012; Runesson, 2005). An object of learning is "a specific insight, skill, or capability that the students are expected to develop" (Marton & Pang, 2006, p.194).

Ling-Lo (2012) distinguishes the critical aspects of a learning object from its critical characteristics: "a critical aspect refers to a dimension of variation, whereas critical feature is a value of that dimension of variation" (p. 65). This can be better understood through an example: if the learning object is the cube, some critical aspects to discern can be the dimensions of the *shape* or *number of its faces*; and it has, as critical characteristics (the values of the dimensions), the fact that *each face is a square (congruent between themselves)* and the fact that *it has exactly six faces.*

Methodology

In our study, we carried out a teaching experiment framed in the research design paradigm (Cobb & Gravemeijer, 2008). A teaching experiment involves a cyclic process of design, implementation, and analysis of a sequence of activities (Steffe & Thompson, 2000) to improve and refine it. Derived from the literature review and the Theory of Variation, the following aspects were considered for the design of the sequence: the use of different manipulatives (pentominoes, blocks, SOMA Cube, Lego pieces) and digital technologies (Lego Designer); construction activities with dimension variation (starting with 2D, continuing with 2D-3D dimension changes); and variation in the characteristics of the representations in the printed materials (number of divisions in the different pentominoes, and colors or grayscale for the representations of 3D objects). The first activity is described in detail in the following section.

Our study had two cycles: in the first one, we designed a sequence of six activities to be carried out in 13 sessions; we analyzed the results of its first implementation for improving the design in the second cycle, in which we had the same number of activities but implemented in 15 sessions.

In both implementations, 7-8-year-old students participated. In the first cycle, we had eight participating students and in the second, 26 (a complete group of third grade). For the data collection, we used two video cameras to record what happened during each class, complemented by field notes. These records were used to plan subsequent sessions, as well as to perform a retrospective analysis of the experiment. In the second implementation, the first author of this paper acted as teacher-researcher, and together with the students, they agreed on the organization of the activities: student autonomy, materials to use (manipulatives and worksheets –with brief and clear guidelines on the activity) and ways of working (individual, in pairs, teams or as a whole group). When managing her class, the teacher-researcher carried out different actions: she did a recap of the aim of the previous session, mentioned the objective of the current session, asked questions and clarified doubts to the teams, specified the mathematical vocabulary used to describe spatial actions, and coordinated the closing plenary discussion with the entire group.

In order to analyze the development of spatial reasoning as a result of the implementation of the sequence of activities, we used a diagnostic pre and post test, as well as observations of the cognitive and movement actions of the students during the activities.

Description of some of the activities

In our design, and according to the Theory of Variation, each activity has a specific *learning object* and is made up of two or three tasks. An assignment can be carried out in one or two class sessions. *Variants* and *invariants* of this learning object are required for each task. *Critical aspects* and *characteristics* describe those elements of spatial reasoning that students are expected to develop. Next, we present the design of the first activity –which focuses on recognizing, visualizing and performing isometric movements in the plane using two-dimensional representations (puzzles)–; we describe the elements of the Theory of Variation involved in it and then analyze some results of the activity implementation.

An activity focused on isometric movements of two-dimensional representations

The *learning object* of this activity is rotation and translation (isometric movements) in the plane and in space, when using pentominoes (12 pieces; see Figure 1.a).

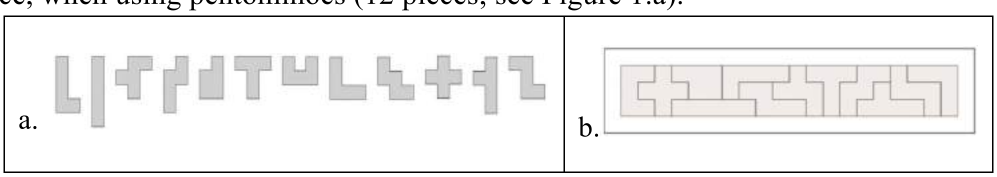


Figure 1: a. The pentomino pieces. b. Rectangle made up of pentomino pieces.

Students have to solve *different* puzzles (the *variants*) formed with the *same* pentomino pieces (the *invariants*); this requires promoting the ability to discern that, even though the shape and perimeter change, the area is conserved. In this activity there are four *critical aspects*: comparison and visualization, localization, turns, and organization of the pieces. The *critical characteristics* related to each critical aspect are presented in Table 1.

Table 1: Description of the critical characteristics

Critical aspects	Critical characteristics
Comparison and visualization	• Recognizing the shape of each piece. • Comparing the shapes of the pieces in order to assemble them. • Recognizing, in the 2D representation, the pieces that make up each puzzle (whether they are explicit or implicit). (Ideas of congruence through immediate perception and superposition). • Imagining what the union of the pieces represents in the given configuration. (The whole).
Localization	• Locating, in the 2D representation, the location of each piece. • Describing the relative position of each piece using terms of proximity (near, far) and direction (up, down, right, left).
Turns	• Rotating and flipping pieces to complete a given setup.
Organization of the pieces	• Organizing the pieces to achieve the requested configuration. • Dividing the puzzle into sections. • Assemble the pieces that make up a section.

This activity has two tasks (T1 and T2). In T1, each student has 12 pieces of pentomino to assemble them on a rectangular frame of 3 × 20 units, in such a way that it covers it completely, without overlapping pieces (see Figure 1.a). In this task, students need to recognize the shape of each piece of the pentomino and compare them.

In order to promote the use of language, in the assembly of the puzzles, students are encouraged to interact and support each other with ideas or suggestions, with the restriction of only giving verbal indications or gestures. And at the end of the T1 task, a group discussion is carried out, with the following guiding questions: *¿Do all the puzzles have the same number of pieces? ¿Are the pieces themselves, different or the same? ¿Why are they different or the same? ¿How could we differentiate them?*

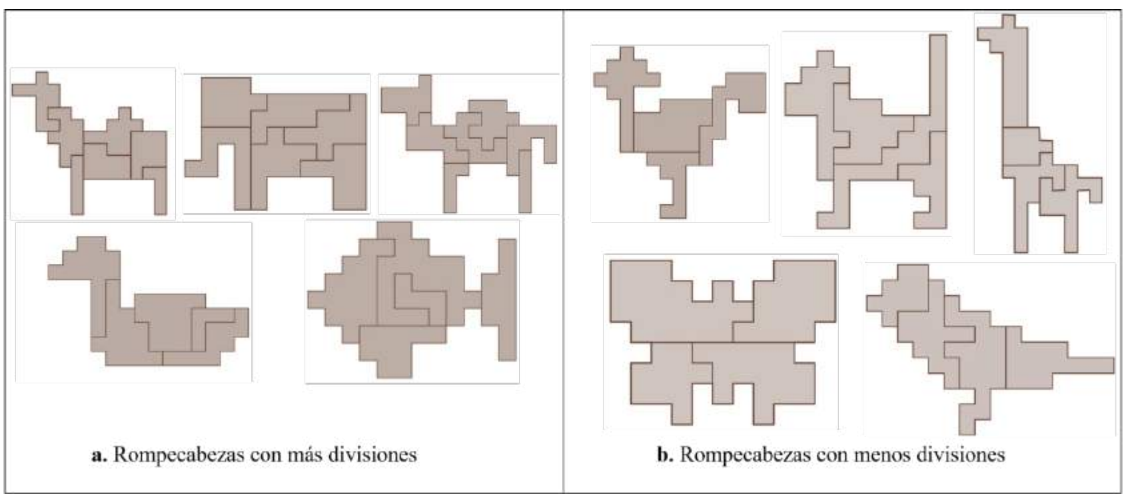


Figure 2: Representations of the puzzles to assemble, as given to the students in T2.

In task T2, each student must assemble an assigned puzzle in the shape of an animal (see Figure 2), for which clues are given regarding the shape of the pieces that compose it: some puzzles (Figure 2.a) show some subdivisions congruent to the pentomino pieces; while in others, only four divisions are shown, none of which is congruent to any part (Figure 2.b). Students put together the puzzles with the most divisions and then the puzzles with the least divisions. In this sense, different levels of cognitive difficulty are considered (from more guided to less guided).

Results of Activity 1

In the implementation of T1, the students worked for two hours and all managed to *recognize the shape of the pentominoes* and identified how they fit into the rectangular frame, without any leftover or missing space.

For T2, two sessions were required, each lasting two hours. In the first of these sessions, students put together the puzzles with more divisions; students who had difficulties, were given a sheet with a printed replica of the assembled puzzle, showing the pieces in real size (in a 1:1 scale) (see Figure 3.a). The intention was for all students to recognize the shape of each pentomino piece, its location and position in the puzzle. In the second session, students put together puzzles with fewer divisions. Those who finished first helped their teammate (see Figure 3.b); to do this, they used the assembled puzzle (scale 1:1), and gave instructions to their partner regarding the orientation and position of each piece.

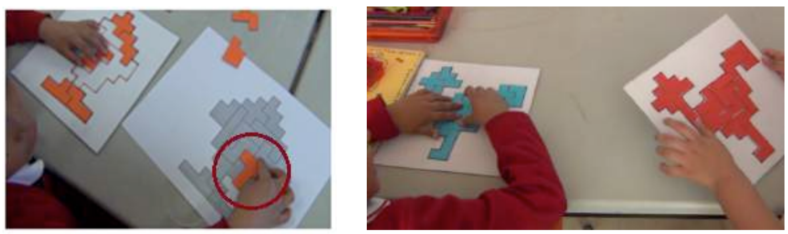


Figure 3: Examples of student work during task T2.

From overlapping pieces to visualizing spaces

During T1 and T2 we identified three strategies for assembling the puzzles: overlapping, trial-and-error, visualization-and-imagination. When they used the replica to assemble the puzzle, the most common way was to overlap the pentomino pieces unto the congruent spaces on the replica (see the part indicated in Figure 3.a) to later transfer (carry out a translation) of the pieces unto the puzzle.

When assembling the puzzles with more divisions, initially students used *trial-and-error* to place the pieces (see Figure 4.a); later, they *visualized* if any of the pieces had the shape of a section in a space of the puzzle that still needed to be completed (see Figures 4.b and 4.c).

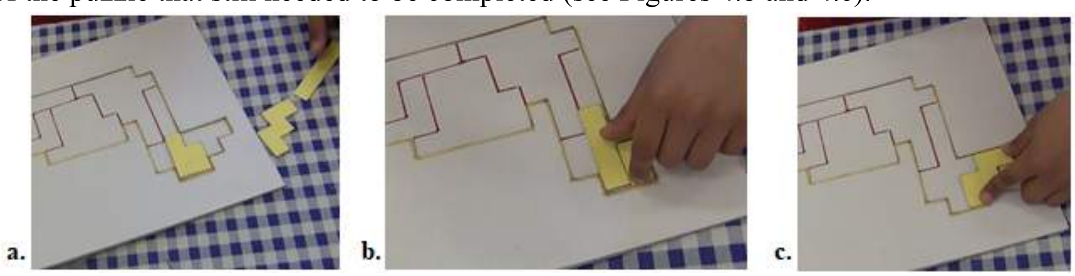


Figure 4: Location of the pentominoes by trial and error.

For putting together the puzzles with fewer divisions, the students generated a strategy: to *first locate the pentominoes at the edges of the puzzle*, since it was easier to recognize the congruence of the shape of the edges with the shape of some of the pentomino pieces (see Figure 5); thus, they postponed placing the pieces of the center of the puzzle.

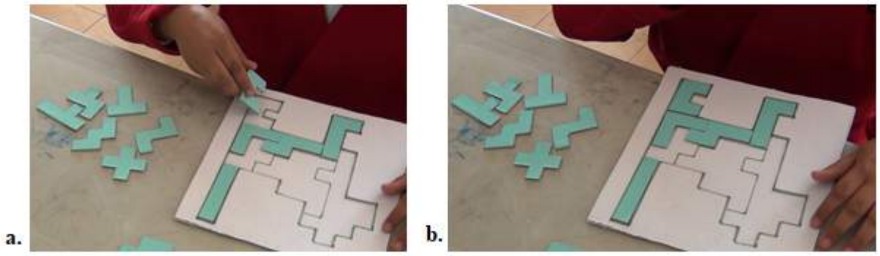


Figure 5: Assembling puzzles with fewer divisions in T2.

In putting together these puzzles, not only was it necessary to match the shape of the pentomino pieces with those of the puzzle, but also to compare the missing shapes of the puzzle with the remaining pentomino pieces. For example, Figure 6 shows that the student placed a pentomino in a space (marked section in Figure 6.a,), because its shape partially coincides with that of that space in the puzzle; however, since he did not find another piece that would complete the space, as can be seen in Figures 6.b and 6.c, the student discarded the piece that he had initially placed.

Figure 6: Matching puzzle pieces in T2.

Identifying the locations of the pentomino pieces and the different ways in which they fit into the puzzles, allowed a refinement of strategies. At first it was a trial-and-error activity; and it was through the comparison between the remaining spaces of the puzzle and the shape of the pieces. that students could *imagine-and-visualize* the congruence between the divisions of the puzzle and the assembly of pentomino pieces.

Critical aspects of isometric movements: from translation and rotation, to turn

In T1 and T2, students were able to locate, immediately or not, a pentomino piece in the puzzle depending on whether the orientation of the piece and the congruent space were the same or different. When it was the same, the students moved (*translated)* the piece without difficulty (see Figure 7).

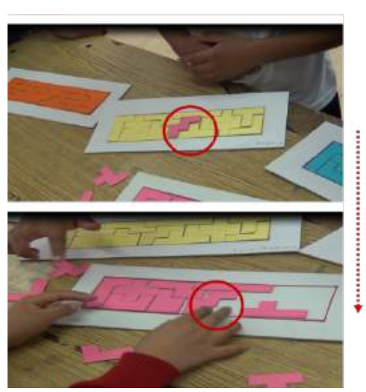


Figure 7: Translation movement.

In the case where the orientation of the piece and the missing space were different, students *rotated* the pieces, with no apparent difficulty, through a movement carried out on the plane (see Figure 8).

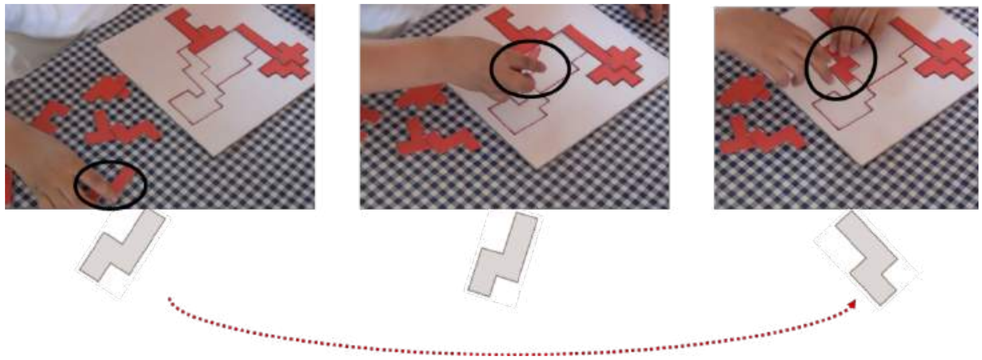


Figure 8: Rotation movement in the plane.

A challenge for the children was the action of turning. If the location of a piece in the puzzle required a *rotation* movement in space, and if a student did not immediately recognize how to locate it, he would first rotate it in the plane and then *visualize* whether, with a turn of the piece in the 3D space, it would fit into the puzzle (see Figure 9).

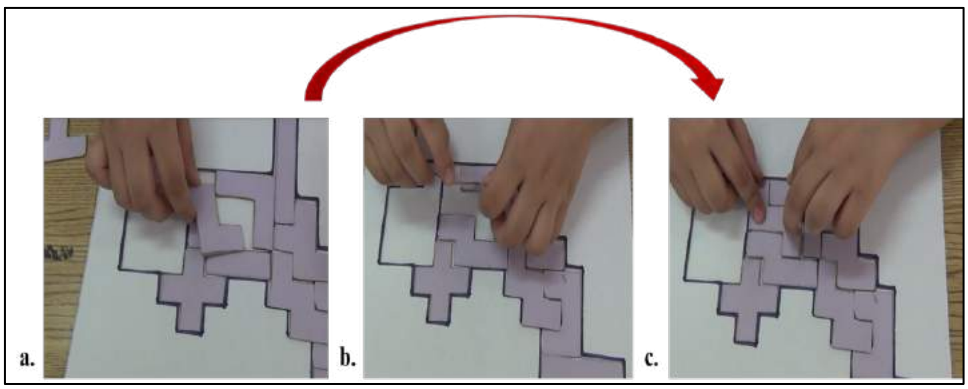


Figure 9. Rotation movement in space.

All of the students, through rotation and translation movements, achieved the required assembled puzzles. Experimenting in putting together these puzzles allowed them to *identify subconfigurations* (one figure contained in another) and *visualize* the congruence of a composite shape (a union) formed by joining several pentomino pieces (the parts). It should be noted that the movement actions, when locating a piece, are not linear. In the examples presented in this section, we illustrate how students, in order to place a piece in the puzzle, perform a combination of the following actions: they manipulate the piece to *translate* it, *visualize* its *orientation*, *rotate* and/or *turn* it, in order to finally *locate* it in the empty space in the puzzle.

The implementation of this activity reflects a development of the spatial reasoning of the students, since, thanks to an activity design that included a *variation of the puzzles, a variation of the positions and orientations of the pentomino pieces,* and an *invariance in the number and shape of the pieces*, they went from *locating the pieces by trial and error*, to *visualizing* the location of the pieces in the puzzles. The two tasks led the students to *rotate* and *translate* the pieces of the pentomino, find a *correspondence* of each of the pieces according to the shape that they identified in the drawing, *compare* the remaining spaces with the unused pieces, and *visualize* and imagine the composition. Furthermore, they recognized that there are several puzzle shapes that can be put together using the same number of pentomino pieces.

Discussion and final remarks

In the design of the activity reported here, three elements were considered in order to develop spatial reasoning in the students: i) The use of the same pentomino pieces, in different puzzles; ii) a gradual change in the level of difficulty of the puzzles (from more to fewer divisions); and iii) the difficulties, reported in the literature, when putting together puzzles (e.g., turning in the 3D space).

Through the first element, students were given the opportunity to recognize that, even when the puzzles were different, they could always be assembled using the same number of pieces; they noted also that the location, orientation and direction of the pentomino pieces varied. The variation of puzzles and invariance of the pentomino pieces could assist these students in creating meanings for the concept of area, which according to Mamolo, Ruttenberg-Rozen and Whiteley (2015), is a common difficulty for students.

The gradual increased complexity of the activities promoted the development of visualization processes through the composition of pieces. When students assembled puzzles with more divisions, they could see the *congruence* of remaining puzzle spaces with the pentomino pieces. But when they had to put together puzzles with fewer divisions, they had to *discern* which of the pieces, when put together, would complete a section of the puzzle divisions. In this process, we found that children *developed construction strategies,* such as: starting the assembly by identifying and locating the pieces at the edges that is, going from the outside in); and assembling the puzzle in sections according to the divisions.

Both in the design and in the development of the activities, possible difficulties were anticipated that a 7-8-year-old student could face, as reported in the literature (Arıcı & Aslan-Tutak, 2015; Gonzato, Fernández & Díaz, 2011). If students did not identify the pentomino pieces that would go in a certain section, a replica was provided to help them in solving the puzzle. This helped the children to *establish congruences* between pentomino pieces and *perform isometric transformations such as rotation and translation* with the pieces.

The previous results show the potential of activities using 2D representations to support the development of spatial reasoning skills in 7-8-year-old children. The use of tangible material, in accordance with what is mentioned by Gutiérrez (1991), allowed students to experiment and recognize the movement and shapes of the pentomino pieces and two-dimensional puzzles. In addition, identifying the position and orientation of the pentominoes in the puzzles required students to *compare, overlap, rotate, translate, visualize,* and *imagine* the shapes of the pieces in the various puzzles.

Gonzato, Díaz-Godino and Neto (2011) have found that, if these experiences are provided in the first years of schooling, children acquire greater abilities to build constructions and mentally manipulate figures in the plane and in the 3D space. Therefore, we consider that these types of experiences that promote cognitive actions (visualizing, imagining) and movement (comparing, overlapping, rotating, translating), allow students to make sense and understand a world presented through two-dimensional representations in different areas of knowledge and in daily life.

References

Arıcı, S., & Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 179-200.

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, In Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education, 14*(2), 133-148.

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM, 47*(3), 519-529.
Davis, B., Okamoto, Y., & Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 139-150). Routledge.
Francis, K., & Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. In *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 121-136). Routledge.
Gómez, I. M., Albaladejo, I. M. R., & López, M. D. M. G. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, *48*(6), 909-924.
Gonzato, M., Díaz Godino, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación matemática, 23*(3), 5-37.
Gonzato, M., Fernández, M., & Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 99-117.
Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat.*, (pp. 44-59). Valencia, España.
Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., & La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM, 47*(3), 363-375.
Ling Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R., & Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM, 47*(3), 483-496.
Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(2), 193-220.
Orgill, M. (2012). Variation theory. In N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning Dordrecht*, (pp. 3391-3393). The Netherlands: Springer.
Ortiz, Y. A. (2018). Desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas: Una propuesta didáctica para la exploración de representaciones 2D y 3D. Tesis de maestría. México: Ciudad de México, Universidad Pedagógica Nacional.
Ortiz, Y. A., Sacristán, A. I., & Sandoval, I. T. (2019). Una revisión de la literatura para el estudio en edades tempranas del desarrollo del razonamiento espacial mediante CTIM/STEM. *5° Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa*, Cinvestav. http://www.matedu.cinvestav.mx/~5toColoquiodeDoctorado/progtem5to.html
Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 191-212.
Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge journal of education, 35*(1), 69-87.
Steffe, L. & Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements, In Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.
Uttal, D. H. & Cohen, C. A. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why and how. *Psychology of Learning and Motivation, 57* (2), 147–181.
Van den Heuvel-Panhuizen, M., Iliade, E., & Robitzsch, A. (2015). Kindergartners' performance in two types of imaginary perspective-taking. *ZDM, 47*(3), 363–375.
Vázquez, S. M., & Noriega Biggio, M. (2010). La competencia espacial: Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación Matemática, 22*(2), 65-91.

DISEÑO DE ACTIVIDADES PARA EL DESARROLLO DE RAZONAMIENTO ESPACIAL EN EDADES TEMPRANAS A TRAVÉS DE MANIPULATIVOS

DEVELOPMENT OF SPACE REASONING IN EARLY AGES THROUGH VARIATION ACTIVITIES

Yudi Andrea Ortiz Rocha
Cinvestav, México
yudi.ortiz@cinvestav.mx

Ivonne Twiggy Sandoval Cáceres
Universidad Pedagógica Nacional, México
isandoval@upn.mx

Ana Isabel Sacristán Rock
Cinvestav, México
asacrist@cinvestav.mx

Las habilidades de razonamiento espacial son necesarias para desempeñar actividades en la escuela, en el trabajo y en la vida cotidiana en general. Diferentes estudios señalan la importancia de su desarrollo en edades tempranas, pues permite la lectura de un mundo tridimensional y su interpretación en representaciones bidimensionales. Realizamos un estudio enfocado al diseño de actividades, usando la Teoría de la Variación, para potenciar habilidades de razonamiento espacial en estudiantes entre siete y ocho años. En este documento presentamos características del diseño de una actividad basada en el uso de pentominós (rompecabezas bidimensionales). Los resultados muestran desarrollo en habilidades de razonamiento espacial cuando se favorecen acciones como comparar, superponer, rotar, trasladar, visualizar e imaginar movimientos, posiciones y ubicaciones de las piezas del rompecabezas.

Palabras clave: Educación primaria, pensamiento espacial, representaciones y visualización.

Introducción y antecedentes

Las habilidades de razonamiento espacial son necesarias en el actuar y el pensar del ser humano. La importancia del desarrollo de dichas habilidades se refleja tanto en lo cotidiano como en el ámbito escolar. En la vida cotidiana, autores como Gonzato, Fernández y Díaz Godino (2011) reconocen, por ejemplo, que el desarrollo de razonamiento espacial es necesario para ubicarse, desplazarse y leer mapas donde objetos bi- y tridimensionales pueden estar presentes. En relación con lo escolar, investigaciones señalan que estas habilidades son necesarias para el aprendizaje de matemáticas avanzadas (Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley, 2015; Hallowell et al., 2015) y el desenvolvimiento en otras áreas como tecnología, ingeniería, arquitectura (Arıcı, y Aslan-Tutak, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015), geografía, computación gráfica y artes visuales (Clements y Sarama, 2011; Vázquez y Noriega Biggio, 2010). En términos de la relación entre el pensamiento espacial y el rendimiento en STEM (por sus siglas en inglés, correspondientes a Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas), Uttal y Cohen (2012) exploraron y sugirieron que las habilidades espaciales predicen fuertemente la selección de estudiantes para estudiar las áreas STEM.

Si bien se reconoce la importancia de desarrollar habilidades de razonamiento espacial en la escuela, una revisión de la literatura en educación matemática (Ortiz, 2018; Ortiz, Sacristán, Sandoval, 2019) refleja una falta de estudios para potenciar competencias, habilidades, pensamiento o razonamiento espacial. Ortiz (2018) analizó artículos en 12 revistas en inglés y español de educación matemática, publicados entre 2010 y 2016. Observó que solo el 4.7% de los artículos se enfoca en aspectos del aprendizaje y enseñanza de la geometría (en contraste con los enfocados a aritmética, álgebra y cálculo). De este porcentaje, solo el 13% aborda aspectos de razonamiento espacial: unos describen la importancia de su desarrollo, otros se centran en identificar dificultades y algunos más presentan propuestas de actividades.

Las investigaciones centradas en analizar las consecuencias del poco desarrollo del razonamiento espacial han identificado dificultades en la visualización de representaciones 2D y 3D (Arıcı y Aslan-

Tutak, 2015); en el movimiento (giros) de objetos 2D y 3D (Pittalis y Christou, 2010); en la comprensión del significado de fórmulas de área y volumen (Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley, 2015); en la construcción de figuras en 2D y 3D (Pittalis y Christou, 2010); en la conexión entre representaciones 2D y 3D (Dindyal, 2015); y en lectura de mapas (Gonzato, Fernández y Díaz, 2011). Se ha encontrado que estas dificultades inciden en otras disciplinas y áreas de trabajo que implican interpretar representaciones para resolver tareas (Francis y Whiteley, 2015).

En relación con el diseño de propuestas de actividades, en la investigación se reconocen objetivos por nivel educativo: en preescolar y primaria se pretende que los estudiantes reconozcan representaciones bidimensionales (dibujos) de objetos reales (Hallowell, Okamoto, Romo y La Joy, 2015; Van den Heuvel-Panhuizen, Iliade y Robitzsch, 2015); en secundaria se pretende que manipulen objetos tridimensionales, ya sea con geometría dinámica o material tangible (Arıcı y Aslan-Tutak, 2015; Gómez, Albaladejo y López, 2016), y, de esa manera, logren conjeturar sucesos relacionados con algún contexto determinado.

También son pocos los estudios longitudinales enfocados en describir qué tipo de materiales actividades o propuestas de enseñanza/aprendizaje propician el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial. Como lo precisan Davis, Okamoto y Whiteley (2015) se requiere mayor investigación al respecto. En este sentido, el estudio en el que se basa este documento investigó ¿cómo proporcionar, a través del diseño de actividades que involucran representaciones bi- y tridimensionales, oportunidades de aprendizaje a estudiantes de siete a ocho años de edad para el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial? Para responder a este cuestionamiento, se diseñaron seis actividades con base en la Teoría de la Variación (Marton y Pang, 2006), que se implementaron en una escuela pública ubicada en una zona marginada de la Ciudad de México.

En este documento se presenta el diseño de la primera actividad que involucra movimientos isométricos en el plano, mediante el uso de rompecabezas con piezas pentominó. A continuación se describen elementos de la Teoría de la Variación en los que se basa el diseño de la actividad; posteriormente, se realiza un breve análisis de cómo este diseño promueve el desarrollo del razonamiento espacial de los estudiantes.

Perspectiva teórica: La variación como herramienta para el diseño de actividades

En la Teoría de la Variación (Marton y Pang, 2006; Ling-Lo, 2012) el aprendizaje sucede cuando se experimenta una diferencia entre dos cosas o entre varias partes de una misma cosa (Marton y Pang, 2006), es decir, cuando el aprendiz logra *discernir características* y *aspectos críticos* de algún *objeto de aprendizaje* (Orgill, 2012; Runesson, 2005). Un objeto de aprendizaje, en esta teoría, es "una idea introspectiva (insight), una habilidad o una capacidad específicas que se espera que los estudiantes desarrollen" (Marton y Pang, 2006, p.194).

Ling-Lo (2012) distingue los aspectos críticos de un objeto de aprendizaje, de sus características críticas: "un aspecto crítico se refiere a una dimensión de la variación, mientras que una característica crítica es un valor de esa dimensión" (p. 65). Esto se puede entender mejor mediante un ejemplo: si el objeto de aprendizaje es el cubo, algunos aspectos críticos a discernir pueden ser las dimensiones de *forma* o *número de sus caras*; y tiene como características críticas (los valores de las dimensiones) que *cada cara es un cuadrado (congruentes entre sí)* y que *tiene exactamente seis caras*.

Metodología

En nuestro estudio se llevó a cabo un experimento de enseñanza enmarcado en el paradigma de investigación de diseño (Cobb y Gravemeijer, 2008). Un experimento de enseñanza implica un proceso cíclico de diseño, implementación y análisis de una secuencia de actividades (Steffe y Thompson, 2000) para mejorarla y refinarla. Derivado de la revisión de la literatura y de la Teoría de la Variación, para el diseño de la secuencia se consideraron los siguientes aspectos: uso de diferentes manipulables (pentominós, bloques, Cubo SOMA, piezas de Lego) y tecnologías digitales (Lego Designer); actividades de construcción con variación en la dimensión (comenzando con 2D, continuando con cambios de dimensión 2D-3D); y variación en las características de las representaciones en los impresos (cantidad de divisiones en los diferentes pentominós, y colores o escala de grises para las representaciones de objetos 3D). En el siguiente apartado se describe con detalle la primer actividad.

Nuestro estudio tuvo dos ciclos: en el primero se diseñó una secuencia de seis actividades llevadas a cabo en 13 sesiones; se analizaron los resultados de su primera implementación y los resultados sirvieron para mejorar el diseño en el segundo ciclo, terminando con el mismo número de actividades pero implementadas en 15 sesiones. En ambas implementaciones participaron estudiantes entre los siete y ocho años. En el primer ciclo participaron 8 estudiantes y en el segundo, 26 (un grupo completo de tercer grado). Para la toma de datos se utilizaron dos cámaras de video y se registraron en notas de campo lo sucedido durante cada clase. Estos registros se usaron para planear las sesiones posteriores, así como para realizar un análisis retrospectivo del experimento. En la segunda implementación, la primera autora de este escrito fungió como profesora-investigadora y junto con los estudiantes acordaron la organización de las actividades: autonomía de los alumnos, material a utilizar (manipulables y hojas de trabajo –con indicaciones breves y claras sobre la actividad) y formas de trabajo (individual, en parejas, equipos o grupo completo). En la gestión de la clase, la profesora-investigadora realizó diferentes acciones: recapituló el objetivo de la sesión anterior, mencionó el objetivo de la sesión, hizo preguntas y aclaró dudas en los equipos, precisó el uso de vocabulario matemático para describir acciones espaciales y coordinó la discusión plenaria de cierre con todo el grupo.

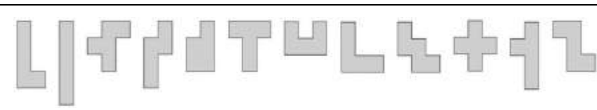
Para analizar el desarrollo del razonamiento espacial a raíz de implementar la secuencia de actividades, se usó una prueba diagnóstica aplicada como pre y post test, así como observaciones de las acciones cognitivas y de movimiento de los estudiantes durante las actividades.

Descripción de algunas actividades

En nuestro diseño, cada actividad tiene un *objeto de aprendizaje* determinado y está conformada por dos o tres tareas. Una tarea puede realizarse en una o dos sesiones de clase. Para cada tarea se precisan *variantes* e *invariantes* de dicho objeto de aprendizaje. Los *aspectos* y *características críticas* describen aquellos elementos del razonamiento espacial que se espera desarrollen los estudiantes. A continuación se presenta el diseño de la primera actividad –la cual se centra en reconocer, visualizar y realizar movimientos isométricos en el plano usando representaciones (rompecabezas) bidimensionales—, se describen los elementos de la Teoría de la Variación involucrados en ella y se analizan algunos resultados de su implementación.

Una actividad centrada en movimientos isométricos de representaciones bidimensionales

El *objeto de aprendizaje* de esta actividad está enfocado en movimientos isométricos en el plano (rotación y traslación) y en el espacio, al usar pentominós (12 piezas; ver Figura 1a).


a.

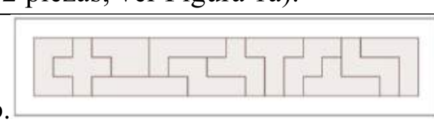

b.

Figura 1: a. Las piezas pentominó. b. Rectángulo formado por piezas pentominó.

Los alumnos resuelven *diferentes* rompecabezas (las *variantes*) armados con las *mismas* piezas de pentominó (las *invariantes*); esto supone promover el discernimiento de que, aunque cambia la forma y el perímetro, hay conservación del área. En esta actividad son cuatro los *aspectos críticos:*

comparación y visualización, localización, giros y organización de las piezas. Las *características críticas* relacionadas a cada aspecto crítico se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Descripción de las características críticas

Aspectos críticos	Características críticas
Comparación y visualización	Reconocer la forma de cada pieza. Comparar las formas de las piezas para ensamblarlas. Reconocer, en la representación 2D, las piezas que componen cada rompecabezas (estén explícitas o implícitas). (*Ideas de congruencia por percepción inmediata y superposición*). Imaginar lo que representa la unión de las piezas en la configuración dada. (*El todo*).
Localización	Ubicar, en la representación 2D, el lugar de cada pieza. Describir la posición relativa de cada pieza usando términos de proximidad (cerca, lejos) y de dirección (arriba, abajo, derecha, izquierda).
Giros	Rotar y voltear piezas para completar una configuración determinada.
Organización de piezas	Organizar las piezas para lograr el ensamble solicitado. Dividir el rompecabezas en secciones. Ensamblar las piezas que conforman una sección.

Esta actividad tiene dos tareas (T1 y T2). En T1 cada estudiante tiene 12 piezas de pentominó para ensamblarlas sobre un marco rectangular de 3 unidades × 20 unidades de tal manera que lo cubra completamente, sin sobreponer piezas (ver Figura 1a). En esta tarea los estudiantes necesitan *reconocer* la forma de cada pieza del pentominó y *compararlas*.

Para favorecer el uso del lenguaje, se promueve la interacción entre los estudiantes para apoyarse en el armado de los rompecabezas con ideas o sugerencias, con la restricción de sólo dar de indicaciones verbales o gestos. Y en el cierre de la tarea T1 se hace una socialización para responder las siguientes preguntas guía: *¿Todos los rompecabezas tienen el mismo número de piezas? ¿Las piezas entre sí, son diferentes o iguales? ¿Por qué son diferentes o iguales? ¿Cómo las podríamos diferenciar?*

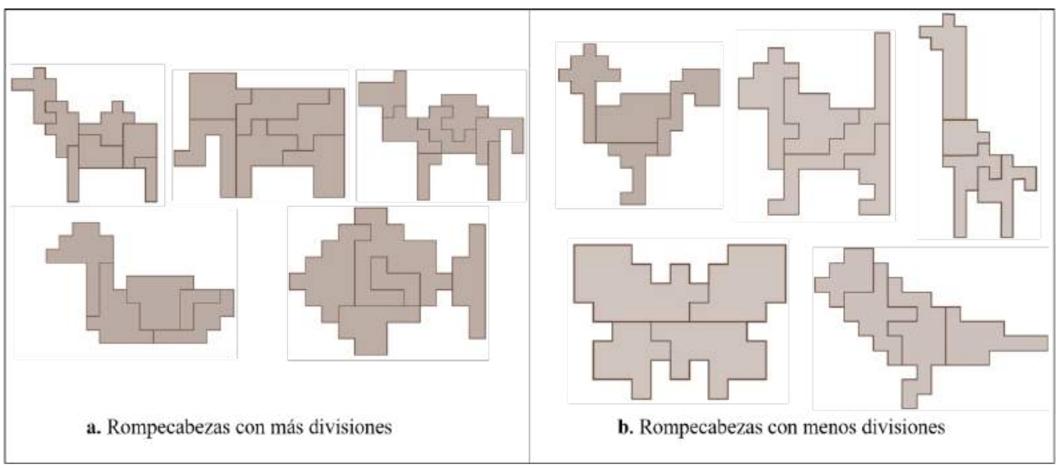


Figura 2: Representaciones, dadas a los alumnos en T2, de los rompecabezas a construir.

En la tarea T2, cada estudiante debe armar un rompecabezas asignado con la forma de un animal (ver Figura 2), para el cual se dan pistas respecto a la forma de las piezas que lo componen: unos rompecabezas (Figura 2.a) muestran algunas subdivisiones congruentes a las piezas pentominós; mientras que en otros, solo se muestran cuatro divisiones, ninguna de las cuales es congruente a alguna pieza (Figura 2.b). Los estudiantes arman primero los rompecabezas con más divisiones y después aquellos con menos divisiones. En este sentido se consideran diferentes niveles de dificultad cognitiva (de más guiado a menos guiado).

Resultados de la Actividad 1

En la realización de T1 los estudiantes trabajaron durante una sesión de dos horas y todos lograron *reconocer la forma de los pentominós* e identificaron cómo se encajaban en el marco rectangular, sin que sobrara o faltara algún espacio.

Para T2 se requirieron dos sesiones, cada una de dos horas. En la primera de estas sesiones, los alumnos armaron los rompecabezas con más divisiones; a quienes se les dificultaba, se les proporcionaba una hoja con una réplica del rompecabezas ya armado, mostrando las piezas en tamaño real (escala 1:1) (ver Figura 3.a). La intención era lograr que todos reconocieran la forma de cada pieza pentominó, su ubicación y posición en el rompecabezas. En la segunda sesión, los estudiantes armaron rompecabezas con menos divisiones. Quienes terminaron primero ayudaron a su compañero (ver Figura 3.b); para ello, usaron el rompecabezas armado (escala 1:1), y dieron indicaciones a su compañero respecto a la orientación y posición de cada pieza.

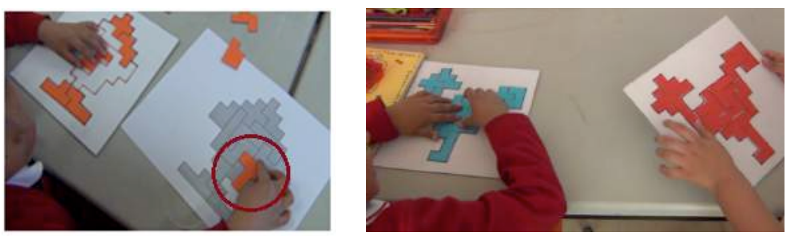


Figura 3: Ejemplos del trabajo de los estudiantes durante la tarea T2.

De la superposición de piezas a la visualización de espacios

Durante T1 y T2 identificamos tres estrategias para el armado de los rompecabezas, superposición, ensayo-y-error, visualización-e-imaginación. Cuando usaron la réplica para el armado del rompecabezas, lo más usual fue hacer uso de la superposición de las piezas de pentominó en los espacios congruentes sobre la réplica (ver parte señalada en la Figura 3.a) para, después, trasladar dichas piezas al rompecabezas.

Al armar los rompecabezas con más divisiones, colocaron las piezas de pentominó, por *ensayo-y-error* inicialmente (ver Figura 4.a); y luego, fueron *visualizando* si alguna de sus piezas tenía la forma de alguna sección en un espacio del rompecabezas que faltaba por armar (ver Figuras 4.b y 4.c).

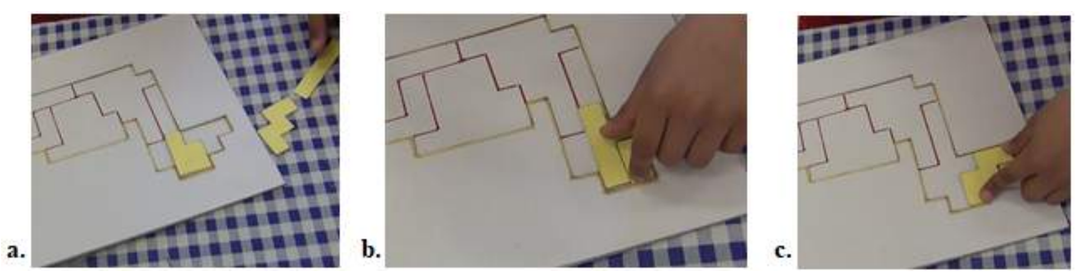


Figura 4: Ubicación de los pentominós por ensayo y error.

Para el armado de rompecabezas con menos divisiones los estudiantes generaron una estrategia: *ubicar primero los pentominós de los bordes del rompecabezas*, pues era más fácil reconocer la congruencia de la forma del borde con algunas formas de las piezas pentominó (ver Figura 5); así posponían la colocación de las piezas del centro del rompecabezas.

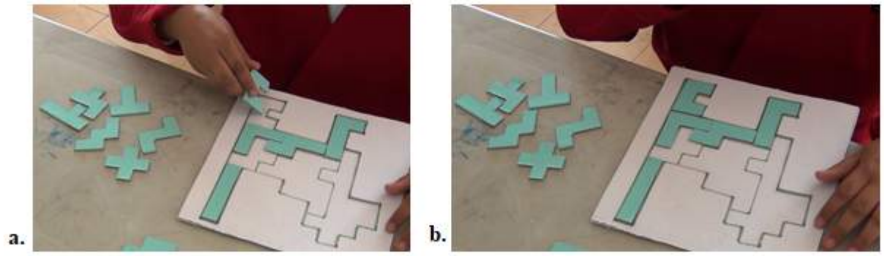


Figura 5: Armado de rompecabezas con menos divisiones en T2.

En el armado de estos rompecabezas no solo era necesario hacer corresponder la forma de las piezas pentominó con las del rompecabezas, sino comparar las formas faltantes del rompecabezas, con las piezas restantes de pentominó. Por ejemplo, en la Figura 6, se puede observar que el estudiante ubicó en un espacio (sección señalada en la Figura 6.a,) una pieza pentominó, porque su forma coincide parcialmente con la de ese espacio del rompecabezas; sin embargo, como no encontró otra pieza que completara el espacio, en las Figuras 6.b y 6.c se aprecia que el estudiante descarta la pieza colocada inicialmente.

Figura 6: Haciendo corresponder las piezas en el rompecabezas en T2.

La identificación de la ubicación de las piezas pentominó y las diferentes maneras como éstas encajaban en los rompecabezas permitió el refinamiento de estrategias. Al principio fue una actividad de ensayo-y-error; y fue a través de la comparación entre los espacios sin armar del rompecabezas y la forma de las piezas, que los estudiantes fueron *imaginando-y-visualizando* la congruencia entre las divisiones del rompecabezas y la unión de piezas pentominó.

Aspectos críticos de movimientos isométricos: de la traslación y la rotación, al giro

En T1 y T2 los estudiantes ubicaban en el rompecabezas una pieza pentominó inmediatamente o no dependiendo de si la orientación de la pieza y del espacio congruente era igual o diferente. Cuando era igual, los estudiantes *trasladaban* la pieza sin dificultad (Figura 7).

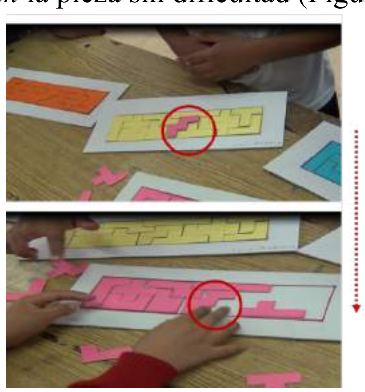


Figura 7: Movimiento de traslación.

En el caso de que la orientación de la pieza y el espacio faltante fueran diferentes, *rotaban,* sin dificultad aparente, las piezas con un movimiento realizado sobre el plano (ver Figura 8).

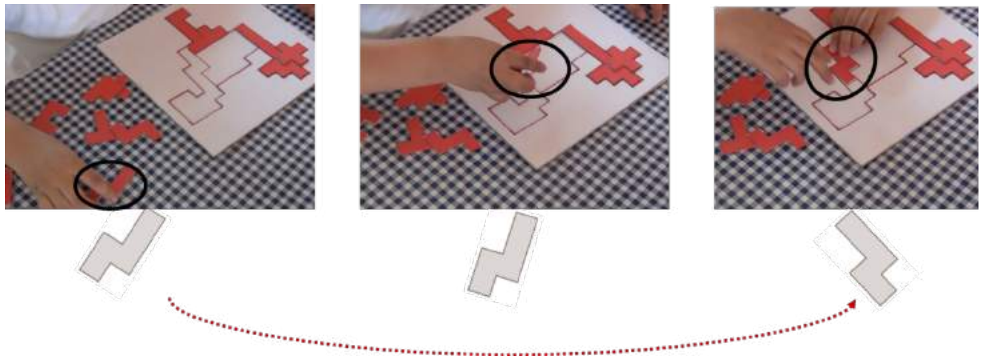


Figura 8: Movimiento de rotación en el plano.

Un reto para los niños fue la acción de girar. Si la ubicación de la pieza en el rompecabezas requería realizar un movimiento de *rotación* en el espacio, y si algún estudiante no reconocía de inmediato cómo ubicarla, primero la rotaba en el plano y luego *visualizaba* si con un giro de la pieza en el espacio le permitía encajarla en rompecabezas (ver Figura 9).

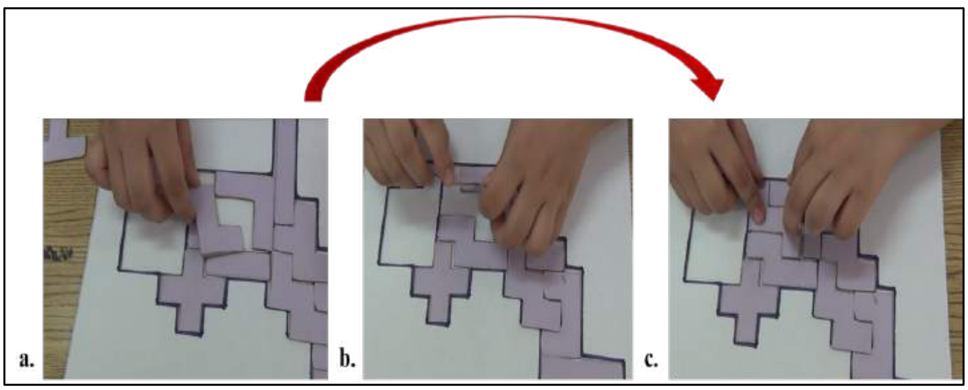


Figura 9. Movimiento de rotación en el espacio.

Todos los estudiantes, a partir de movimientos de rotación y traslación, lograron los ensambles solicitados. Experimentar con el armado de estos rompecabezas, les permitió *identificar subconfiguraciones* (una figura contenida en otra) y *visualizar* la congruencia de una forma compuesta (un ensamble) obtenida al unir piezas de pentominó (sus partes). Cabe señalar que las acciones de movimiento, al ubicar alguna pieza, no son lineales. En los ejemplos presentados en este apartado ilustramos cómo los estudiantes, para colocar en el rompecabezas alguna pieza, realizan una combinación de las siguientes acciones: la manipulan para *trasladarla*, *visualizan la orientación* de la pieza, la *rotan* y/o *giran* para finalmente *ubicarla* en el espacio vacío del rompecabezas.

La implementación de esta actividad refleja un desarrollo del razonamiento espacial de los estudiantes, pues, al incluir en el diseño de las actividades: la *variación de rompecabezas, variación de posiciones y orientaciones de las piezas* pentominó, e *invariancia en el número y forma de las piezas*, pasaron de *ubicar las piezas por ensayo y error,* a *visualizar* la ubicación de las piezas en los rompecabezas. Las dos tareas llevaron a los estudiantes a que *rotaran* y *trasladaran* las piezas del pentominó, *correspondieran* una a una las piezas dadas con la forma que identificaban en el dibujo *compararan* los espacios faltantes con las piezas sin usar y *visualizaran* e imaginaran su composición. Además, reconocieron que hay varias formas de rompecabezas que se pueden armar con la misma cantidad de piezas pentominó.

Discusión y reflexiones finales

En el diseño de la actividad reportada aquí, se consideraron tres elementos a fin de desarrollar razonamiento espacial en los estudiantes: i) El uso de las mismas piezas de pentominó en diferentes rompecabezas; ii) un cambio progresivo en el nivel de dificultad para armar el rompecabezas (de más a menos divisiones); y iii) las dificultades reportadas en la literatura para armar los rompecabezas (e.g., girar en el espacio 3D).

Con el primer elemento se proporcionó a los estudiantes la oportunidad de reconocer que, aun cuando los rompecabezas fueran distintos, siempre podían ser armados con el mismo número de piezas; además, notaron que la ubicación, orientación y sentido de las piezas pentominó también variaban. La variación de rompecabezas y la invarianza de las piezas pentominó podrían ayudarle a estos alumnos en la compresión del significado de área, que según Mamolo, Ruttenberg-Rozen y Whiteley (2015), es una dificultad común en los estudiantes.

El cambio gradual en la complejidad de las actividades promovió el desarrollo de procesos de visualización a través de la composición de piezas. Al armar rompecabezas con más divisiones, los estudiantes podían *ver la congruencia* de espacios faltantes del rompecabezas con las piezas de pentominó. Pero cuando armaban rompecabezas con menos divisiones, ellos debían *discernir* cuáles de las piezas, al unirlas, completaban una sección de las divisiones del rompecabezas. En este proceso, encontramos que los niños *generaron estrategias de construcción* tales como: iniciar el armado identificando y ubicando las piezas de los bordes (es decir, yendo de afuera hacia adentro) y armar el rompecabezas por secciones según las divisiones.

Tanto en el diseño como en el desarrollo de las actividades se previeron posibles dificultades a las que un estudiante de 7-8 años podía enfrentarse, según lo reportado en la literatura (Arıcı y Aslan-Tutak, 2015; Gonzato, Fernández y Díaz, 2011). Si el estudiante no identificaba las piezas de pentominó que debían ir en determinada sección, se le proporcionaba una réplica que le ayudara en la resolución del rompecabezas. Esto ayudó a los niños en el *establecimiento de congruencias* entre piezas pentominós y la *realización de transformaciones isométricas como rotación y traslación* de las piezas.

Los resultados anteriores muestran el potencial de actividades con representaciones bidimensionales para apoyar el desarrollo de habilidades de razonamiento espacial en niños con edades entre 7-8 años. El uso de material tangible, en concordancia con lo mencionado por Gutiérrez (1991), permitió a los estudiantes experimentar y reconocer el movimiento y las formas de las piezas de pentominó y los rompecabezas bidimensionales. Además, la identificación de la posición y orientación de los pentominós en los rompecabezas requirió que los estudiantes *compararan, superpusieran, rotaran, trasladaran, visualizaran* e *imaginaran* las formas de las piezas con los distintos rompecabezas.

Gonzato, Díaz-Godino y Neto (2011) han encontrado que, de darse estas experiencias desde los primeros años de escolaridad, los niños adquieren mayores capacidades para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio. Por lo que, consideramos que este tipo de experiencias que promueven acciones cognitivas (visualizar, imaginar) y de movimiento (comparar, superponer, rotar, trasladar), permiten a los estudiantes la lectura y comprensión de un mundo presentado a través de representaciones bidimensionales en distintas áreas de conocimiento y en el cotidiano.

Referencias

Arıcı, S., y Aslan-Tutak, F. (2015). The effect of origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(1), 179-200.

Cobb, P. y Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes, In Kelly, A.E., Lesh, R.A. y Baek, J.Y. (eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science,* *Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, pp. 68-95. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., y Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of mathematics teacher education, 14*(2), 133-148.

Dindyal, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM, 47*(3), 519-529.

Davis, B., Okamoto, Y., y Whiteley, W. (2015). Spatializing school mathematics. In *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 139-150). Routledge.

Francis, K. y Whiteley, W. (2015). Interactions between three dimensions and two dimensions. In *Spatial reasoning in the early years: Principles, assertions, and speculations,* (pp. 121-136). Routledge.

Gómez, I. M., Albaladejo, I. M. R., y López, M. D. M. G. (2016). Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. *ZDM*, *48*(6), 909-924.

Gonzato, M., Díaz Godino, J., y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación matemática, 23*(3), 5-37.

Gonzato, M., Fernández, M., y Díaz Godino, J. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 77*, 99-117.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat.*, (pp. 44-59). Valencia, España.

Hallowell, D. A., Okamoto, Y., Romo, L. F., y La Joy, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM, 47*(3), 363-375.

Ling Lo, M. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Mamolo, A., Ruttenberg-Rozen, R., y Whiteley, W. (2015). Developing a network of and for geometric reasoning. *ZDM, 47*(3), 483-496.

Marton, F. y Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(2), 193-220.

Orgill, M. (2012). Variation theory. In N. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the Sciences of Learning Dordrecht*, (pp. 3391-3393). The Netherlands: Springer.

Ortiz, Y. A. (2018). Desarrollo del razonamiento espacial en edades tempranas: Una propuesta didáctica para la exploración de representaciones 2D y 3D. Tesis de maestría. México: Ciudad de México, Universidad Pedagógica Nacional.

Ortiz, Y. A., Sacristán, A. I., y Sandoval, I. T. (2019). Una revisión de la literatura para el estudio en edades tempranas del desarrollo del razonamiento espacial mediante CTIM/STEM. *5° Coloquio de Doctorado en Matemática Educativa*, Cinvestav. http://www.matedu.cinvestav.mx/~5toColoquiodeDoctorado/progtem5to.html

Pittalis, M., y Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 191-212.

Runesson, U. (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge journal of education, 35*(1), 69-87.

Steffe, L. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements, In Kelly, A.E. y Lesh, R.A. (eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education,* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.

Uttal, D. H. y Cohen, C. A. (2012). Spatial thinking and STEM education: When, why and how. *Psychology of Learning and Motivation, 57* (2), 147–181.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., Iliade, E., y Robitzsch, A. (2015). Kindergartners' performance in two types of imaginary perspective-taking. *ZDM, 47*(3), 363–375.

Vázquez, S. M., y Noriega Biggio, M. (2010). La competencia espacial: Evaluación en alumnos de nuevo ingreso a la universidad. *Educación Matemática, 22*(2), 65-91.