LEARNING DIFFICULTIES TO BUILD ZERO AND ONE, BASED ON VON NEUMANN

DIFICULTADES DE APRENDIZAJE PARA CONSTRUIR EL CERO Y EL UNO, CON BASE EN VON NEUMANN

María Leticia Rodríguez-González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN – México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx

Eugenio Filloy-Yagüe
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN – México
e.filloy@cinvestav.mx

Bernardo Gómez-Alfonso
Universidad de Valencia, España
bernardo.gomez@uv.es

This research project focuses on identifying the difficulties that children between 6 – 7 years-old have in learning natural numbers, when working a teaching model with a Von Neumann formal mathematical basis. In this study, we present the analysis of the experimentation with a first-grade class in the construction of zero and one numbers, contrasting the results with a case of the clinical interview. Our methodological theoretical framework is the Local Theoretical Model (LTM) and its four components: Formal, Cognitive, Communication and Teaching. With the theoretical contribution of each component, the categories of analysis are designed to observe and explain difficulties in the use of the Mathematical Sign System (MSS) involved in the construction of the first natural numbers, using iteration and the recursive process.

Keywords: difficulties, learning, natural numbers.

Research Problem

Learning numerical notions remains a concern in research and education policies. This project has been developed under the perspective of Educational Mathematics, stating that the learning difficulties that elementary school children have are not found in what the teacher does nor in the students, but in mathematics itself. Therefore, you have to know in depth the mathematical basis of what is taught.

In the curriculum of Mathematics primary education in Mexico (SEP, 2011) the development of numbers is focused on the use of cardinality in different contexts in contrast to that of ordinality. From the first degree, the number zero is used as a figure in the quantity representation and as an empty column, but there is no conceptual treatment. The lack of a mathematical conceptualization in teaching natural numbers as the basis of the arithmetic structure is accompanied by teaching practices that continue with the tradition of mechanization, memorization and exercise of the oral and written number sequence, and of algorithms of addition and multiplication.

From the formal point of view, Cantor and Peano contributed to the conceptualization of natural numbers. For Cantor, it is through the cardinality relations of the sets (Mosterín, 2000, pp. 105-108). While Peano proposes an axiomatic that involves a formal conceptualization of numbers (Op. Cit. pp. 54-55). However, this goes against how children cognitively process the first actions to order the world. It is considered essential to begin the learning of natural numbers with the construction of the number zero as it is a contribution to mathematical conceptualization and a contribution that goes beyond the numbering system, independent of the debates on its origin.

Therefore, the orientation of this work is to look at learning and observe learning difficulties from a formal mathematical proposal. According to Filloy, Puig & Rojano (2008), the analysis provided by the formal component indicates that difficulties must be sought in the most primitive mathematical actions. For the learning of natural numbers, we found these actions in the iteration. Hamilton & Landin (1961) introduce us to the construction of natural numbers based on the works of the logician

In: Sacristán, A.I., Cortés-Zavala, J.C. & Ruiz-Arias, P.M. (Eds.). (2020). *Mathematics Education Across Cultures: Proceedings of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico. Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020

mathematician Von Neumann, who uses the theory of sets and summarize the axiomatic of Peano in the principle of finite induction and iteration; each number is constructed from a finite number of iterations; order is implicit by the same construction.

The research questions are 1) What elements of the formal model in the terms referred to by Hamilton & Landin (1961) should we consider designing a Teaching Model that translates into specific activities for children aged 6 to 7? 2) What difficulties emerge when children work from the construction of the number zero and one, based on that teaching model?

To answer these questions, we propose as a general objective to identify students' learning difficulties in the construction of the numbers zero and one, in the framework of a teaching model based on Von Neumann.

The particular objectives are 1) Design and implement a teaching model by translating the Formal Model into sequences of specific activities, for the construction of the first natural numbers. 2) Identify and explain the difficulties that children 6 to 7-year old's have, when working with a Von Neumann's-based Teaching Model.

Theoretical Framework

The LTM (Filloy, et. al. 2008) is a theoretical and methodological framework for the experimental observation on research in Educational Mathematics. LTM relies on Peirce's semiotic approach (1987) to make sense of MSS, a theory for the interpretation of experimental observations. MSS focuses its attention on the production of intertexts through the reading/transformation of mathematical texts in relation to other texts. This allows users to produce meaning and mathematical meaning to communication processes that occur in classrooms, when activity sequences are implemented for a particular purpose. The sense of the local focuses the analysis on a specific phenomenon through the four components: formal, cognitive, communication and teaching.

The design of this LTM has been structured according to the four components

Formal. Von Neumann Model (Hamilton & Landin, 1961) proposes a logic of construction that requires MSS involved in natural numbers, starting with zero: "Zero is the empty set; i. e., $0 = \emptyset$", it continues with the number one as the set containing element zero: "$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$". From this moment on, enter the successor definition:

> The set $x \cup \{x\}$ is the *successor* of the set x. If y is a set and if there is a set x such that y is the successor of x, then y is a successor. For each set x, the successor of x is x'. Thus, $1 = 0', 2 = 1'$, 3=2', etc. (Op. Cit. p. 77).

Each ordinal is the set of all the ordinals that precede it. Each of these sets is $\in -$ordered by the same construction, where for all x and for all y at least one of the following conditions is met: $x \in y, x = y, or\ y \in x$. Natural numbers are defined as "n is a $\in -ordered$ every nonempty subset of n has a leading element, if $x \in n$ then $x \subset n$, if n is not empty then n is a successor if $x \in n$ and x is not empty then x is a successor" (Op. Cit. 1961, p. 81). To count a set A is a one-to-one correspondence $\varphi: [1, n] \rightarrow A$ between $[1, n]$ y A, where $n \in N$." Cardinality is: If n is the result of a count of A, then A has n elements, or the number of elements in A is n, or the cardinality of A is n. We also denote the cardinality of A by $\#\ (A)$. (Op. Cit. pp. 99-101).

The sum is given, naturally when obtaining the successor, by iteration and starting from n, is $n + 1$. When n is a set, then the sum is the union of disjoint sets: $A \cup B$ and if m and n are their cardinals respectively, then $m + n$.

Cognitive. Based on the contributions of the theory of activity (Talizina, 2001) we expect to identify difficulties that obstruct (OB) students' competence in the use of MSS involved in the construction of natural numbers due to the ways in which children aged 6 to 7, have learned to use natural numbers in everyday life. These obstructions can hinder the transition from action to cognitive operation to foster the conceptual numerical development of zero, one and the notion of a successor.

Communication based on semiotics (Peirce, 1987), we analyzed induction, deduction and abduction arguments as processes of signification (ASP). The categories are built with significant relations to interpret what children do and say in the production of meaning and processes of the significance of the actions they perform in numerical activities. This is the Sense Endowment (SD). The logic of using MSS is related to iteration and recursion processes in the construction of natural numbers.

Teaching. It is understood as a collection of concrete texts that the students can understand, so that they gradually convert concrete texts into abstract texts, with a conventional mathematical meaning. Researchers designed a Teaching Model to translate Von Neumann's formal model into specific activities with the use of manipulative material.

Methodology Design and implementation of the Teaching Model. The design of the activities was carried out according to the mathematical definitions of the Von Neumann sequence according to Hamilton & Landin (1961, pp. 74 – 112), we have called them principles (Pi):

P_1: Beginning the construction with zero. The name of the empty set is zero.

P_2: Building the number one as a successor to zero number. Using the recursive process $0 = \emptyset; 1 = \{\emptyset\}; 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}; 3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; and so on. Keys are replaced with bags, as shown in Figure 1.

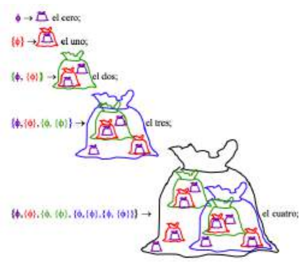

Figure 1: Recursive number processing, using sachets

P_3: One successor has been called *the following*.

P_4: Definition of Set n, as natural number.

P_5: Counting and cardinality.

P_6: Addition.

The use of a semi-straight has been included to represent the order of the numbers, from the interval definition "If $a, b \in N, [a, b] = \{x \mid x \in N \textit{ and } a \leq x \textit{ and } x \leq b\}. [a, b]$ is the interval of a to b." (Op. Cit. 1961, p. 97).

We selected two sequences of activities of the teaching model to present them in this work briefly described as follows:

Guess I am (P_1). -The empty set as the number zero.

- Teacher asks the students to look at an empty clear plastic bag and say what it contains (possible answers: nothing and empty).
- Teacher asks the students how to name this empty bag. The intention is to relate the notion of numbers to the bags to refer to bag/number.
- Students are asked by what number the empty bag can be named with.
- When students name the word zero, they are asked to identify the label of the number zero and paste it on the outside of the bag.
- Teacher asks students if they already know this number and what they think it is useful for.
- Teacher asks where students can paste it on the semi-straight (drawn on the board).

Can we build the next one? (P_2, P_3). - Construction of the successor.

- Once the empty set is related and named as number zero, the teacher asks: Can we build the next one? (The next is number one, it's the bag/number that contains item zero).
- Teacher takes another empty bag and asks students how they can build the next one. Teacher asks who the empty bag is, so that they name it as zero, they are asked to stick the zero label outside this empty bag/number and put it in the new bag named as number one; then stick the label for item one outside the bag.
- They are asked where to paste it in the semi-straight (it is expected to be after zero, building the sense of linear order).
- With this logic of construction, the successors are built, reflecting on each construction, who is before, who is after, who is in all numbers, who has no ancestor, who contains each bag/number.

This teaching model was used in the first phase when working with a first-grade class from a public school in Mexico City. Based on quantitative (written exercises) and quantitative (performance in each session) the students were classified into three strata High, Medium and Low. We selected one student from each stratum to participate in the clinical interview. The second phase was carried out in the next school year, with the application of the clinical interview.

The results of the analysis of model experimentation were published in (Rodríguez, et. al 2018) and (Rodríguez, et. al. 2019a, 2019b). Due to the space available in this report, we expose only a fragment of a group session and a snippet of Daniel's interview (low stratum).

Observation of the empirical experience with analysis categories. In the analysis of the experimentation of the Model, we identified recurring difficulties in the children's performances. These difficulties are grouped into three axes 1) The use of pragmatic/intuitive and spontaneous knowledge, that is, difficulties in identifying zero as a number; identify the successor and ancestor of any number. 2) Semantic use of numbers in rendering and counting actions, that is, difficulties in recognizing the number zero as an empty set, recognizing that zero is the only number belonging to any successor, identifying zero as the point of origin in the straight, and recognizing that every successor contains all his previous ones. 3) Syntactic use in operations, that is, difficulty using the form $a \cdot 10 + b$.

To understand and explain the difficulties and based on the theoretical framework, there are three categories of analysis designed, Cognitive Trends that constitute obstructions for learning (OB); Induction, Deduction and Abduction Arguments as Significance Processes (ASP) and, Significant Relations Indicators for Sense Endowment (SD).

Finally, to contrast whether the difficulties continue, or new ones appear, the clinical interview took place and it was interpreted based on the same categories of analysis.

The following is assigned as follows: Teacher (M), Children All (N_s), Nicole (N_e), N_1, N_2... refers to any child except those whose initial letter is the name of a specific child, Interviewer (E) and Daniel (D).

Fragment of dialogue of the activity sequence, "Guess I am":

M: What's with the bag? [Teacher shows the empty bag].
N1: Nothing [The teacher inserts some objects into the bag and then empties it in front of them].
M: How does the bag look?
N2: Empty.
M: How do we know that my bag is empty?
A: Because it has nothing in it.
F: If you don't put something in it, you have nothing.
E: If it is empty it is not heavy.

Ne: If you put something in it, then it's full.
E: Or by numbers.
M: What did you say?
Ns: By numbers.
M: And, what number do you think should be here?
Ns: One, two, three... [Labels shown from numbers 0 to 9].
N3: A zero.
M: Who's that number?
Ns: Nothing.
Ns: Zero.
M: Who wants to go to the front to look for number zero and stick it onto the bag?
K: Here it is [Karen chooses the label with number zero].
M: Where do I put it? [The teacher displays the bag/number zero, to place it on the semi-straight painted on the board].
F: At the end [Points to the left end of the straight but use the word end].
M: At the end?
F: Ah! At the beginning! [He corrects his answer].

Fragment of dialogue of the activity sequence, "Can we build the next one?"

M: Can we build the next one?
N_s: The one.
M: How are we going to build the next one?
Ne: Take another bag and put one on it.
M: What do we have here? [showing the empty bag].
N_s: Empty.
M: Empty, but I need...
N_s: The one.
M: How are we going to do it because this bag is empty?
N_s: Put the one on it! [The teacher inserts the bag of the zero that was previously built and asks them].
M: How many bags are inside? (...)
N_s: One. (...)
M: What number was formed here?
N_s: One.
M: Why is it one Emiliano?
E: Because the one comes first.
M: Nicole…
Ne: Because the one goes after the zero.
M: Where do I put it?
N_s: In first place.
M: Who's in the first one? [points to zero that is placed on the straight].
N_s: A zero number.
E: You pass it for the second [he refers to the right of the zero, on the straight].

Analysis of these fragments. "*Guess I am". -* In this fragment we observe the difficulties of identifying zero as an empty set and as the origin point on the straight. The zero as an empty set is observed in the action of inserting objects into the bag/number and removing them, children were able to relate the void to words: "nothing, empty, full, put in, take out, heavy" (A, F, E, Ne). This can be interpreted as SD-related actions, which allow an approach to the notion of zero as empty. (A) makes inductive reasoning (ASP) by using the word "nothing" to justify the vacuum, giving meaning (SD) to the absence of elements, which gave a pattern for his peers to follow the meaning of the notion of emptiness. When (F) verbally states, "Because if you don't put something in, you have nothing," he's making a deduction (ASP), allowing (E) to relate the weight to the vacuum, and (Ne) reasons inductively (ASP). Later, faced with the question of being able to name the empty bag, the answer to (E) allows us to observe that this is abductive reasoning (ASP), when proposing the use of numbers. However, for the rest of the group, it is a difficulty, which can be understood to be caused by a cognitive (OB) from their experiences with numbers, they have learned to repeat the number sequence starting with the one (Ns). While (N_3) manages to follow the idea of (E) and chooses the number zero, which can be understood as abductive reasoning (ASP).

The (F)'s difficulty in identifying zero as the origin point in the semi-straight, could be, because this student was sitting in front of the right end of the semi-straight. This cognitive (OB), of perception, made it difficult for him to establish a reversibility relation, to focus his attention on the semi-straight as an object and not only on visual perception. When the teacher questions it, he allows (F) to correct his answer.

Can we build the next one? In this fragment, we see difficulties to recognize that zero is the only number belonging to any successor and in recognizing that every successor contains his former. Children identify that the successor to zero is one, so we can say that they are making sense of the expression "the next one". However, the difficulty remains when children do not give meaning to the construction, they consider they need only the label of number one (N_2) "Take another bag and put the one on it", (N_s) "Put one on it!" This difficulty is constant in the first lines of the activity, because children do not make sense of the recursive process. They do not recognize that the bag/number one must contain at least one item. It is understood that this difficulty is due to a cognitive obstruction (OB) from how they have learned that numbers are only the oral and written repetitions of the counter sequence from one. The action of (M) by inserting the empty bag labeled with the number zero and asking them about the number that was formed, allowed some children to observe that it is number one, when it contains element zero (N_s): "One, one". But, for most children, they continue to associate it with label one: (E) "Because one is first," thus, observing that this difficulty is an (OB) with the use of reversibility relations to identify that the one's ancestor is zero; just as the zero's successor is the one. With the deductive argument (ASP) of (N_e): "One goes after zero", leads to (E) correcting his answer, using an inductive argument (ASP) when the teacher asks where to place it: "You move it to the second one".

Clinical interview. The objective was to compare whether the difficulties that occurred during the experimentation of the model continue or new ones appear.

Fragment of the dialogue in the sequence of activities: "Guess I am":

E: What do you have in the bag?
D: Nothing.
E: Nothing and how's the bag?
D: Empty.
E: How do you know it's empty?
D: Because it has nothing in it.
E: How can you say it has nothing?
D: It would be a little bit heavy.
E: How can we represent this bag that has nothing, that is empty? [Daniel keeps thinking for a few seconds, unanswered. So, the interviewer shows him the material he has on the table: a semi-straight, transparent rubber bags of different sizes, number labels in flexible plastic]. Can I use any of these?
D: This [Daniel points to the zero-number label heap].
E: What is this?
D: Zero. [Daniel sticks the number zero label on the front of the bag].

E: Now that we know that this bag is empty and that it is the number zero, where do we place it on the line?
D: Here [Daniel points to the left end of the straight].

Fragment of the dialogue in the sequence of activities: Can we build the next one?

E: What's next?
D: The one.
E: What do I need to make the number one?
D: A number inside.
E: Who's going to be that element inside?
D: The one?
E: Who was before the one?
D: Ah, zero!
E: Zero, so what do you have to do?
D: Grab a... [Daniel takes another empty bag, sticks the number zero label and inserts it into the new bag/number one].
E: What name am I going to give you?
D: The one. [Daniel points and takes a number one label and sticks it on the new bag/number one].
E: All right! Where are you going to put it in the straight?
D: Here [Daniel places it to the right of the bag/number zero].

Analysis of the fragments of the clinical interview. *Guess I am.* In this excerpt, we can observed that (D) relates the empty set to the number zero, by expressing, "it would be a little bit heavy", a deductive argument (ASP) that evoked the experience of the group session in the last school year, which, can be understood as a sense endowment (SD) to relate the notion of vacuum to the zero number, but it is not conventional yet. But D doubts when the teacher asks him how to name the bag/empty number, so (E) points out and asks, "Can I use any of these?", giving the guideline for (D) to choose any of the number labels. When he places it on the left end of the semi-fully, he is making sense (SD) of zero as the starting point of the construction and overcoming that difficulty.

Can we build the next one? - It is observed that there is an endowment of meaning (SD) when recognizing that the next number of the number zero is number one. The answer "A number that is inside" to the interviewer's question: "What do I need to make it number one?" can be understood as a deductive argument (ASP) to make sense (SD) to the notion of a successor. However, when the interviewer asks "Who is that element inside?", evidence of D's insecurity, he answers with another question "The one?", which can be interpreted as a difficulty to produce a sense of use of the recursive process to recognize that every successor contains all of the above. The question of E "Who was before", allows D to evoke the construction process, remembering that the number zero is the one that should be inside the bag/number one: immediately takes a smaller bag and labels it with the number zero, inserts it into the new bag/number one. With these actions, we understand that D makes sense of the use of MSS through recursion. He places the bag/number one in the semi-straight of the bag/number zero, consolidating the sense of order by the same construction.

Final discussion.

We close this space by emphasizing that the general objective is to identify learning difficulties when taught with von Neumann's formal mathematical model for the construction of natural numbers and the logics of using the MSS involved in that task.

During the experimentation, it was possible to check that the influence of the ways in which they have acquired numerical notions makes it difficult to understand and use recursion, but they do not constitute an obstacle. In the clinical interview, the recurring difficulties reappear, which are overcome in less time, making efficient use and making sense of MSS through iteration and recursion (elementary actions for the conceptualization of natural numbers).

For the results obtained, it seems valuable to recover the formal mathematical tradition in teaching from the first grades of elementary education, allowing children to participate in the construction of natural numbers, which gives them the possibility to consolidate generalization, as the basis for solid arithmetic thinking.

Finally, we consider that the conceptual work of numbers with children aged 6 to 7 is not trivial, memoristic or operational; but it can make it easier to develop the concept before symbolism. What this work seeks is to cultivate abstract thinking, which allows children to access higher levels of mathematical knowledge.

References

Filloy, Rojano & Puig. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Usa: Springer.

Hamilton, N. & Landin. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston, USA. Allyn and Bacon, Inc.

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos*. España: Espasa Calpe, S. A.

Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

Rodríguez & Filloy. (2018). Dificultades de uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales. En Herrera Carrasco y Macías Romero (Coords.) *Matemáticas y sus aplicaciones* 10. ISBN 978-607-525-521-7. México: BUAP.

Rodríguez, et. al. (2019[a]). Dificultades en el aprendizaje del cero, en alumnos de escuela elemental. En Marbán, et. al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. España: SEIEM XXIII.

Rodríguez, et. al. (2019[b]). *Un modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en Von Neumann*. Colombia: CIAEM XV.

Talizina, N. (2001). *La formación de las habilidades del Pensamiento Matemático.* México: UASLP

SEP. (2011). *Programas de Estudio. Guia para el maestro*. México: Conaliteg.

DIFICULTADES DE APRENDIZAJE PARA CONSTRUIR EL CERO Y EL UNO, CON BASE EN VON NEUMANN

LEARNING DIFFICULTIES TO BUILD ZERO AND ONE, BASED ON VON NEUMANN

María Leticia Rodríguez González
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN – México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx

Eugenio Filloy Yagüe
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN – México
e.filloy@cinvestav.mx

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia, España
bernardo.gomez@uv.es

Este Proyecto de investigación se ha centrado en identificar dificultades que tienen los niños (6 – 7 años) en el aprendizaje de los números naturales, cuando se trabaja un modelo de enseñanza con una base matemática formal de Von Neumann. En esta comunicación, se presentará el análisis de la experimentación con un grupo de primer grado, en la construcción de los números cero y uno; contrastando los resultados con un caso de la entrevista clínica. Nuestro marco teórico metodológico son los Modelos Teórico Locales (MTL) y sus cuatro componentes: Formal, Cognitivo, Comunicación y Enseñanza. Con el aporte teórico de cada componente se diseñon las categorías de análisis para observar y explicar dificultades de uso del Sistema Matemático de Signos (SMS) involucrado en la construcción de los primeros números naturales, usando la iteración y el proceso recursivo.

Palabras clave: dificultades, aprendizaje, números naturales.

Problema de investigación

El aprendizaje de las nociones numéricas, sigue siendo una preocupación en la investigación y en las políticas educativas. Este proyecto se ha desarrollado bajo la perspectiva de la Matemática Educativa, planteando que las dificultades de aprendizaje que tienen los niños de la escuela elemental, no está en lo que hace la maestra/o, ni en los alumnos; sino en la matemática misma, por lo que hay que conocer con profundidad la base matemática de lo que se enseña.

En la currícula de Matemáticas educación primaria en México (SEP, 2011) el desarrollo de los números está centrado en el uso de cardinalidad en diferentes contextos; en contraste con el de ordinalidad. Desde el primer grado, el número cero se usa como cifra en la representación de cantidades y como columna vacía, pero no hay un tratamiento conceptual. La carencia de conceptualización matemática en la enseñanza, de los números naturales como base de la estructura aritmética, se acompaña de prácticas docentes que continúan con la tradición de la mecanización, memorización y ejercitación de la secuencia numérica oral y escrita, y de algoritmos de adición y multiplicación.

Desde el punto de vista formal Cantor y Peano contribuyeron a la conceptualización de los números naturales. Para Cantor es a través de las relaciones de cardinalidad de los conjuntos (Mosterín, 2000, pp. 105-108). Mientras que Peano propone una axiomatica que involucra una conceptualización formal de los números (Op. Cit. pp. 54-55); pero va en contra de las maneras en que los niños procesan cognitivamente las primeras acciones para ordenar el mundo. Se considera fundamental iniciar el aprendizaje de los números naturales con la construcción del número cero, por ser una aportación que va más allá del sistema de numeración, independiente de los debates sobre su origen.

Por lo anterior, la orientación de este trabajo es mirar al aprendizaje y observar dificultades de aprender cuando los niños trabajan con una propuesta formal matemática. De acuerdo con Filloy, Puig & Rojano (2008), el análisis que nos brinda la componente formal nos indica que las dificultades deben buscarse en las más primitivas acciones matemáticas. Para el aprendizaje de los números naturales estas acciones las encontramos en la iteración. Hamilton & Landin (1961) nos introducen a la construcción de los números naturales con base en los trabajos del lógico – matemático Von Neumann, quien usa la teoría de conjuntos y encapsula la axiomatica de Peano en el principio de inducción finita y en la iteración; cada número es construído a partir de un número finito de iteraciones; el orden está implicito por la misma construcción; lo que permite observar las acciones matemáticas más simples al usar la *iteración*.

Las preguntas de investigación son:

¿Qué elementos del modelo formal en los términos señalados por Hamilton & Landin se deben considerar para diseñar un Modelo de Enseñanza que se traduzca en actividades concretas, dirigidas a niños de 6 a 7 años de edad?

¿Qué dificultades se pueden observar cuando los niños trabajan a partir de la construcción de del número cero y el uno, con base en ese modelo de enseñanza?

Para dar respuesta a estas preguntas, se propone como objetivo general:

Identificar dificultades de aprender la construcción del número cero y el uno, cuando se les propone un modelo de enseñanza basado en Von Neumann.

Objetivos particulares:

Diseñar e implementar un modelo de Enseñanza traduciendo el Modelo Formal a secuencias de actividades concretas, para la construcción de los primeros números naturales.

Identificar y explicar las dificultades, que tienen los niños de 6 a 7 años de edad, al trabajar con un modelo de Enseñanza con base en Von Neumann.

Marco Teórico

Los MTL (Filloy, et. al. 2008) son un marco teórico y metodológico para la observación experimental en la investigación en Matemática Educativa. Se apoyan en el enfoque semiótico de Peirce (1987) para dar sentido a los SMS, una teoría para la interpretación de observaciones experimentales. Los SMS centran la atención en la producción de intertextos a través de la lectura/transformación de textos matemáticos en relación con otros textos. Esto permite a los usuarios la producción de sentido y significado matemático a los procesos de comunicación que se producen en las aulas, cuando se implementan secuencias de actividades con un fin determinado. El sentido de lo *local*, focaliza su análisis en un fenómeno específico a través de los cuatro componentes: formal, cognitivo, de comunicación y de enseñanza.

El diseño de este MTL se ha estructurado de acuerdo con los cuatro componentes:

Formal: Modelo de Von Neumann (Hamilton & Landin, 1961) propone una lógica de construcción que precisa SMS involucrados en la construcción de los números naturales, comenzando por el cero: "El cero es el conjunto vacío; $0 = \emptyset$.", el número uno es el conjunto que contiene al elemento cero: "$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$". A partir de este momento introduce la definición de *sucesor*:

> El conjunto $x \cup \{x\}$ es el sucesor del conjunto x . Si y es un conjunto y si hay un conjunto x tal que y es el sucesor de x, entonces y es un *sucesor*. Para cada conjunto x, el sucesor de x es x'. Por lo tanto, 1 = 0', 2 = 1', 3 = 2', etc. (Op. Cit. p. 77).

Cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que le preceden. Cada uno de esos conjuntos es $\in -ordenado$ por la misma construcción, donde para todo x y para todo y se cumple al menos una de las siguientes condiciones: $x \in y$, ó $x = y$ ó $y \in x$. Se define a los números naturales como: "n es $\in -ordenado$; cada subconjunto no vacío de n pose un elemento principal; si $x \in n$, entonces $x \subset n$; si n no está vacío entonces n es un sucesor; si $x \in n$, y x no está vacío entonces x es un sucesor." (Op. Cit. 1961, p. 81). Contar un conjunto *A* es una correspondencia uno-uno $\varphi\colon [1, n] \to A$ entre $[1, n]$ y A, donde $n \in N$." La cardinalidad es Si *n* es el resultado de un conteo de *A*, entonces *A* tiene *n* elementos, o el número de elementos en *A* es *n*, o la cardinalidad de *A* es *n*. Esto también lo denotamos como la cardinalidad de *A* por *#(A)*. (Op. Cit. pp. 99-101).

La suma se da, de manera natural al obtener el sucesor, por iteración y partiendo de n, es $n + 1$. Cuando n es un conjunto, entonces la suma es la unión de conjuntos disjuntos: $A \cup B$ y si m y n son sus cardinales respectivamente, entonces $m + n$.

Cognitivo: Con base en los aportes de la teoría de la actividad (Talizina, 2001) se pretende identificar dificultades que obstruyen (OB) su competencia con el uso de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales debido a las maneras en que los niños de 6 a 7 años, han aprendido a usar los números naturales en la cotidianeidad. Estos obstructores pueden dificultar el tránsito de la acción a la operación cognitiva para promover el desarrollo numérico conceptual del cero, el uno y la noción de sucesor.

Comunicación: Con base en la semiótica (Peirce, 1987), se analizan los argumentos de inducción, deducción y abducción como procesos de significación (APS). Con las relaciones significantes se construyen las categorías para interpretar lo que hacen y dicen los niños en la producción de sentido y procesos de significación de las acciones que realizan en las actividades numéricas, esto es la Dotación de Sentido (DS). La lógica de uso de los SMS está relacionada con los procesos de iteración y recursión en la construcción de los números naturales.

Enseñanza: Entendida como colección de textos concretos que entiendan los aprendices, con la finalidad de que gradualmente conviertan los textos concretos en abstractos, con un significado matemático convencional. Se ha diseñado un Modelo de Enseñanza traduciendo el modelo formal de Von Neumann a actividades concretas, con el uso de material manipulativo.

Metodología Diseño y ejecución del Modelo de Enseñanza. El diseño de las actividades se realizó siguiendo las definiciones matemáticas de la secuencia de Von Neumann de acuerdo con Hamilton & Landin (1961, pp. 74 – 112), las hemos llamado principios (P_i):

P_1: Inicio de la contrucción con el cero. El nombre del conjunto vacío es el cero.

P_2: Contrucción del número uno como sucesor del número cero. Uso del proceso recursivo $0 = \emptyset$; $1 = \{\emptyset\}$; $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; y así sucesivamente. Las llaves se sustituyen con bolsas, como se muestra en la figura 1.

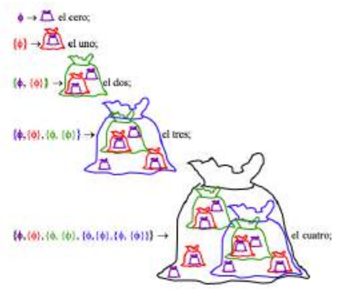

Figura 1: Proceso recursivo de los números, usando bolsitas

P_3: Un sucesor lo hemos llamado el siguiente.

P_4: Definición del Conjunto *n*, como número natural.

P_5: Conteo y cardinalidad.

P_6: Adición.

Se ha introducido el uso de una semirrecta para representar el orden de los números, a partir de la definición de intervalo "Si $a, b \in N, [a, b] = \{x\ x \in N\ y\ a \leq x\ y\ x \leq b\}. [a, b]$ es el intervalo de a hacia b." (Op. Cit. 1961, p. 97).

Para esta comunicación se han seleccionado dos secuencias de actividades del Modelo de Enseñanza, las cuales describiremos brevemente:

Adivina quien soy (P_1). El conjunto vacío como el número cero:

- Se les pide que observen una bolsa de plástico transparente vacía y digan que contiene, (posibles respuestas: nada y vacía).
- Se les pregunta cómo se puede nombrar esta bolsa vacía. La intención es relacionar la noción de números con las bolsas, para referirnos a bolsa/número.
- Se les pregunta con qué número se puede nombrar a la bolsa vacía.
- Al nombrar la palabra cero, se les pide identificar la etiqueta del número cero y la peguen en la parte externa de la bolsa.
- Se les pregunta si ya conocían ese número y para qué creen que sirva.
- Se les pregunta en qué parte de la semirrecta (dibujada en el pizarrón) pueden pegarla.

¿Podemos construir el siguiente? (P_2, P_3).- Construción del sucesor:

- Una vez relacionado y nombrado al conjunto vacío como número cero, se les pregunta: ¿Podemos construir el siguiente? (El *siguiente* es el número uno, es la bolsa/número que contiene al elemento cero).
- Se toma otra bolsa vacía y se les pregunta cómo se puede construir el siguiente. Se les pregunta quién es esa bolsa vacía, con la finalidad de que la nombren como *cero*, se les pide que peguen la etiqueta *cero* afuera de esta bolsa/número vacía, la introduzcan en la nueva bolsa nombrada como uno. Se les pide que peguen la etiqueta del *uno* por fuera de la bolsa.
- Se les pregunta dónde pegarla en la semirrecta (se espera que sea después del cero, construyendo el sentido de orden lineal).

- Con esta lógica de construcción, se van construyendo los sucesores, reflexionando en cada construcción, quién está antes de, quién está después de, quién está en todos los números, quién no tiene antecesor, a quién o quiénes contiene cada bolsa/número.

Este modelo de enseñanza se trabajó en la primera fase con un grupo de primer grado de una escuela pública en la CDMX. Con base en el análisis cuantitativo (ejercicios escritos) y cuantitativo (desempeño en cada sesión) los alumnos fueron clasificados en tres estratos (Alto, medio y bajo); se seleccionó un alumno representante de cada estrato para participar en la entrevista clínica. La segunda fase se realizó en el siguiente ciclo escolar, con la aplicación de la entrevista clínica.

Los resultados del análisis de la experimentación del Modelo, se publicaron en (autores 2018) y (autores 2019[a], 2019[b]). Por la falta de espacio en este reporte, sólo se presentará un fragmento de una sesión grupal y un fragmento de la entrevista de Daniel (estrato bajo).

Observación de la experiencia empírica con las categorías de análisis. En el análisis de la experimentación del Modelo, se identificaron *dificultades recurrentes* en las actuaciones de los niños. Las dificultades se agruparon en tres ejes: Uso de conocimientos pragmáticos/intuitivos y expontáneos: dificultades para identificar al cero como número; identificar al sucesor y antecesor de cualquier número. Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo: dificultades para reconocer el número cero como conjunto vacío; reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor, identificar al cero como punto origen en la semirrecta, reconocer que todo sucesor contiene a todos sus anteriores. Uso sintáctico en las operaciones: dificultades para usar la forma $a \cdot 10 + b$.

Para entender y explicar las dificultades y con base en el marco teórico, se diseñaron *tres categorías de análisis*: Tendencias Cognitivas que constituyen obstructores para el aprendizaje (OB); Argumentos de inducción, deducción y abducción como Procesos de Significación (APS) e; Indicadores de las Relaciones Significantes para la Dotación de Sentido (DS).

Por último, con el fin de confrontar a si las dificultades continúan, o aparecen otras nuevas, la entrevista clínica se aplicó e interpretó sobre la base de las mismas categorías de análisis.

Se usa la siguiente simbología: Maestra (M), Niños todos (N_s), Nicole (N_e), N_1, N_2,… cuando es un niño cualquiera y la letra inicial del nombre cuando es un niño en particular, Entrevistadora (E) y Daniel (D).

Fragmento del diálogo de la secuencia de actividades: "Adivina quien soy":

M: ¿Qué tiene la bolsa? [muestra la bolsa vacía].
N1: Nada [la maestra introduce algunos objetos a la bolsa y luego la vacía frente a ellos].
M: ¿Cómo quedó la bolsa?
N2: Vacía.
M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?
A: Porque no tiene nada.
F: Por si no metes algo, no tienes nada.
E: Si está vacío no está pesado.
Ne: Si le metes algo, ya está lleno.
E: O por números.
M: ¿Cómo dijiste?
Ns: Por números.
M: ¿Y cuál creen que sea el número que debe estar aquí?
Ns: El uno, el dos, el tres, … [Se les muestran etiquetas de los números 0 al 9]
N3: Un cero.
M: ¿Quién es ese número?
Ns: Nada.
Ns: Cero.

M: ¿Quién pasa a buscar al número cero y pegarlo a la bolsa?
K: Aquí está [Karen, elige la etiqueta del número cero].
M: ¿En dónde lo coloco? [La maestra muestra la bolsa/número cero, para colocarla en la semirrecta pintada en el pizarrón].
F: Hasta el final [señala el extremo izquierdo de la semirrecta, pero usa la palabra final].
M: ¿Hasta el final?
F: ¡Ah! ¡En el primero! [Corrige su respuesta].

Fragmento del diálogo de la secuencia de actividades: "¿Podemos construir el siguiente?"

M: ¿Podemos construir el siguiente?
N_s: El uno.
M: ¿Cómo le haremos para construir el siguiente?
Ne: Tomar otra bolsa y ponerle el uno.
M: ¿Qué tenemos aquí? [Mostrando la bolsa vacía].
N_s: Vacía.
M: Vacía, pero necesito…
N_s: El uno.
M: ¿Cómo le haremos, porque esta bolsa está vacía?
N_s: ¡Póngale el uno! [La maestra introduce la bolsa del cero que se construyó previamente y les pregunta:]
M: ¿Cuántas bolsas hay adentro?
N_s: Una.
M: ¿Qué número se formó aquí?
N_s: Un uno.
M: ¿Por qué es uno Emiliano?
E: Porque el uno es primero.
M: Nicole...
Ne: Porque el uno va después que el cero.
M: ¿Dónde lo coloco?
N_s: En el primero.
M: ¿Quién está en el primero? [señala al cero que está colocado en la semirrecta].
N_s: Un número cero.
E: Lo pasas para el segundo [se refiere a la derecha del cero, en la semirrecta].

Análisis de estos fragmentos: "*Adivina quién soy*". En este fragmento se observan las dificultades para identificar el cero como conjunto vacío y como punto origen en la semirrecta.

El cero como conjunto vacío se observa con la acción de introducir objetos a la bolsa/número y luego sacarlos; pudieron relacionar el vacío con palabras: "nada, vacío, lleno, meter, sacar, pesado" (A, F, E, N_e). Esto se puede interpretar como acciones relacionadas con la (DS), los cuales permiten un acercamiento a la noción de cero como vacío. (A) hace un razonamiento inductivo (APS) al usar la palabra "nada" para justificar el vacío, dotando de sentido (DS) a la ausencia de elementos, lo que dio pauta para que sus compañeros pudieran seguir el sentido de la noción de vacío. Cuando (F) expresa verbalmente: "Porque si no metes algo, no tienes nada", está haciendo una deducción (APS) , lo que permite que (E) lo pueda relacionar el peso con el vacío, y (N_e), razona inductivamente (APS). Más adelante, ante la pregunta de poder nombrar a la bolsa vacía, la respuesta de (E) permite observar que se trata de un razonamiento abductivo (APS), al proponer el uso de los números. Sin embargo, para el resto del grupo, constituye una dificultad, que se puede entender es provocada por un (OB) cognitivo proveniente de sus experiencias con los números, han aprendido a repetir la secuencia numérica comenzando con el uno (N_s). Mientras que (N_3) logra seguir la idea de (E) y elige al número cero, lo que se puede entender como un razonamiento abductivo (APS).

La dificultad de (F) para identificar al cero como punto origen en la semirrecta, puede ser a que este alumno se encontraba sentado frente al extremo derecho de la semirrecta. Este (OB) cognitivo, de percepción, le dificultó establecer una relación de reversibilidad, para centrar su atención la semirrecta como objeto y no sólo en la percepción visual. Cuando la maestra lo cuestiona, permite que (F) corrija su respuesta.

¿Podemos construir el siguiente?.- En este fragmento se observan dificultades para reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor; y que todo sucesor contiene a sus anteriores. Los niños identifican que el sucesor del cero es el uno, con lo que se puede decir que están dotando de sentido a la expresión "el siguiente". Sin embargo, la dificultad se observa en que no le dan sentido a la construcción, consideran que sólo se necesita la etiqueta del número uno: (N_e) "Tomar otra bolsa y ponerle el uno", (Ns) "¡Póngale el uno!" Esta dificultad es constante en las primeras líneas de la actividad, no le dan sentido al proceso recursivo. No reconocen que la bolsa/número *uno*, debe contener al menos un elemento. Se entiende que esta dificultad se debe a un obstructor cognitivo (OB) proveniente de las maneras en que han aprendido que los números es sólo la repetición oral y escrita de la secuencia contadora a partir del uno. La acción de (M) al introducir la bolsa vacía etiquetada con el número cero y preguntarles por el número que se formó, permitió que algunos niños observaran que es el número uno, cuando contiene al elemento cero (N_S): "Un uno". Pero, para la mayoría de los niños lo siguen asociando con el primer elemento de la secuencia numérica: (E) "Porque el uno es primero", con lo que se observa que esta dificultad es un (OB) con el uso de las relaciones de reversibilidad para identificar que el antecesor del uno es el cero; así como el sucesor del cero es el uno. Con el argumento deductivo (APS) de (N_e): "El uno va después del cero", conlleva a que (E) corrija su respuesta, usando un argumento inductivo (APS) cuando la maestra pregunta en dónde colocarlo: "Lo pasas para el segundo".

Entrevista clínica. Tuvo como objetivo comparar si las dificultades que se presentaron durante la experimentación del modelo continuan o aparecen nuevas.

Fragmento del diálogo en la secuencia de actividades: "Adivina quién soy"

E: ¿Qué tiene la bolsa?
D: Nada.
E: Nada y ¿Cómo está la bolsa?
D: Vacía.
E: ¿Cómo sabes que está vacía?
D: Porque no tiene nada.
E: ¿Cómo puedes decir que no tiene nada?
D: Estuviera un poco pesado.
E: ¿Cómo podemos representar esta bolsa que no tiene nada, que está vacía? [Daniel se queda pensando algunos segundos, sin contestar. Por lo que la entrevistadora le muestra el material que tiene sobre la mesa: una semirrecta, bolsas hule transparente de diferentes tamaños, etiquetas de números] ¿Alguno de estos puedo usar?
D: Este [Daniel señala el montón de las etiquetas del número cero].
E: ¿Cuál es este?
D: El cero. [Daniel pega la etiqueta del número cero en la parte frontal de la bolsa].
E: Ahora que sabemos que esta bolsa está vacía y que es el número cero ¿En dónde la colocamos en la recta?
D: Aquí [Daniel señala el extremo izquierdo de la semirrecta].

Fragmento del diálogo en la secuencia de actividades: ¿Podemos construir el siguiente?

E: ¿Cuál va a ser el siguiente?
D: El uno.
E: ¿Qué necesito para que sea el número uno?

D: Un número que esté adentro.
E: ¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?
D: ¿El uno?
E: ¿Quién era el que estaba antes?
D: ¡Ah, el cero!
E: El cero, entonces ¿qué tienes que hacer?
D: Agarrar una... [Daniel toma otra bolsa vacía, le pega la etiqueta del número cero y la introduce en la nueva bolsa/número uno].
E: ¿Qué nombre le voy a poner?
D: El uno. [Daniel señala y toma una etiqueta del número uno y la pega en la nueva bolsa/número uno].
E: ¡Muy bien! ¿dónde lo vas a colocar en la recta?
D: Aquí [Daniel lo coloca a la derecha de la bolsa/número cero].

Análisis de los fragmentos de la entrevista clínica. *Adivina quién soy.* - En este fragmento, se puede observar que (D) relaciona al conjunto vacío con el número cero, al expresar: "Estuviera un poco pesado", argumento deductivo (APS) que evocó la experiencia de la sesión grupal en el ciclo escolar próximo pasado. Lo que se puede entender como dotación de sentido (DS) para relacionar la noción de vacío con el número cero, pero aún no es convencional. Pero D duda cuando se le pregunta cómo nombrar a la bolsa/número vacía, se observa que duda, por lo que (E) le señala y pregunta: "¿Alguno de estos lo puedo usar?", dando la pauta para que (D) elija alguna de las etiquetas de los números. Al colocarlo en el extremo izquierdo de la semirrecta, está dotando de sentido (DS) al cero como punto origen de la construcción y superando esa dificultad.

¿Podemos construir el siguiente? - Se observa que hay dotación de sentido (DS) al reconocer que el número siguiente del número cero es el número uno. La respuesta de Daniel "Un número que esté adentro" a la pregunta de la Entrevistadora: "¿Qué necesito para que sea el número uno?", se puede entender como un argumento deductivo (APS) para dotar de sentido (DS) la noción de sucesor. Sin embargo, cuando la entrevistadora pregunta "¿Quién va a ser ese elemento que esté adentro?", se evidencia la inseguridad de D, al contestar con otra pregunta "¿El uno?", lo que se puede interpretar como dificultad para de producción de sentido de uso del proceso recursivo para reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores. La pregunta de E "¿Quién estaba antes", permite que D evoque el proceso de construcción, recordando que el número cero es el que debe estar adentro de la bolsa/número uno, pues de inmediato toma una bolsa más pequeña y le pega la etiqueta del número cero y la introduce en la nueva bolsa/número uno. Estas acciones que realiza D nos permiten entender que le da sentido al uso de los SMS a través de la recursividad. A continuación, coloca la bolsa/número uno en la semirrecta a la derecha de la bolsa/número cero, consolidando el sentido de orden por la misma construcción.

Discusión final

Cerramos este espacio haciendo hincapié en que el objetivo general es identificar las dificultades de aprendizaje cuando se les enseña con el modelo formal matemático de von Neumann para la construcción de los números naturales y la lógica de uso de los SMS involucrados en dicha tarea.

Durante la experimentación se pudo cotejar que la influencia de las maneras en que han adquirido las nociones numéricas, dificulta la comprensión y uso pragmático de la recursividad, pero no constituyen un obstáculo. En la entrevista clínica vuelven a aparecer las dificultades recurrentes, mismas que son superadas en menor tiempo, haciendo un uso eficiente y dotando de sentido los SMS a través de la iteración y recursividad (acciones elementales para la conceptualización de los números naturales).

Por los resultados obtenidos parece ser valioso recuperar la tradición formal matemática en la enseñanza, desde los primeros grados de educación elemental y permitiría la participación de los niños en la construcción de los números naturales, lo que les brinda una posibilidad para consolidar la generalización, como base para un pensamiento aritmético sólido.

Finalmente, consideramos que el trabajo conceptual de los números con niños de 6 a 7 años de edad, no es una construcción trivial, memorística y operativa; pero puede facilitar el desarrollo del concepto antes del simbolismo. Lo que busca este trabajo es cultivar un pensamiento abstracto, que le permita a los niños acceder a niveles superiores de conocimiento matemático.

References

Filloy, Rojano & Puig. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Usa: Springer.

Hamilton, N. & Landin. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston, USA. Allyn and Bacon, Inc.

Mosterín, J. (2000). *Los Lógicos*. España: Espasa Calpe, S. A.

Peirce, Ch. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus Ediciones.

Rodríguez & Filloy. (2018). Dificultades de uso de la lógica de los Sistemas Matemáticos de Signos involucrados en la construcción de los números naturales. En Herrera Carrasco y Macías Romero (Coords.) *Matemáticas y sus aplicaciones* 10. ISBN 978-607-525-521-7. México: BUAP.

Rodríguez, et. al. (2019[a]). Dificultades en el aprendizaje del cero, en alumnos de escuela elemental. En Marbán, et. al. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática*. España: SEIEM XXIII.

Rodríguez, et. al. (2019[b]). *Un modelo de Enseñanza para la adquisición de las nociones de los números naturales con base en Von Neumann*. Colombia: CIAEM XV.

Talizina, N. (2001). *La formación de las habilidades del Pensamiento Matemático.* México: UASLP

SEP. (2011). *Programas de Estudio. Guia para el maestro*. México: Conaliteg.